

Interrogation 32 d'entraînement

Géométrie de l'espace

1. **Restituer le cours.** *Source : interro 3.1*

- 1.1 Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
- 1.2 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
- 1.3 Énoncer le théorème de la bijection.
- 1.4 Énoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
- 1.5 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.

Restituer le cours. *Source : interro 19.1*

- 1.6 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
- 1.7 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
- 1.8 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
- 1.9 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
- 1.10 Énoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.

Restituer le cours. *Source : interro 27.1*

- 1.11 Énoncer le théorème de Weierstrass.
- 1.12 Énoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
- 1.13 Énoncer l'inégalité triangulaire.
- 1.14 Énoncer l'inégalité de la moyenne.
- 1.15 Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- 1.16 Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2. **Calcul dans \mathbb{R} , manipuler la racine carrée dans des inéquations.** *Source : interro 12.3*

- 2.1 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} \geq 1$.
- 2.2 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $x - 1 \leq \sqrt{x + 2}$.
- 2.3 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x + 2} \leq \sqrt{x + 1} + 1$.
- 2.4 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2} \geq 3$.
- 2.5 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x^2 + 5x + 3} < x + 2$.

3. **Résoudre une équation différentielle d'ordre 2.** *Source : interro 12.5*

- 3.1 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos(x)$.
- 3.2 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $y'' - 4y' + 3y = 3x - 5 + 2x^2 e^{-x}$.
- 3.3 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) : $y'' - 4y' + 4y = 2x e^{2x}$.
- 3.4 Déterminer l'ensemble des solutions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* de l'équation (E) : $y''y - (y')^2 + 2yy' + 2y^2 \ln(y) = 0$.
Indication : poser $z = \ln(y)$.
- 3.5 Résoudre sur $] -1; 1[$ l'équation (E) : $(1 - x^2)y'' - (4\sqrt{1 - x^2} + x)y' + 3y = 0$. *Indication : poser $x = \sin(t)$.*
- 3.6 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation (E) : $4xy'' + (2 - 8\sqrt{x})y' + 4y = 2\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}}$. *Indication : poser $t = \sqrt{x}$.*

4. **Calculer un développement limité.** *Source : interro 14.2*

- 4.1 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}}$.
- 4.2 Calculer un développement à l'ordre 6 en 0 de $f : x \mapsto (\operatorname{ch}(x) - \cos(x))(\operatorname{sh}(x) - \sin(x))$.
- 4.3 Calculer un développement à l'ordre 4 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2+x}$.
- 4.4 Calculer un développement à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$.
- 4.5 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{(1+x)^2}$.

5. Encadrer une intégrale. Source : interro 27.2

5.1 Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^a \frac{e^{-t^n} \cos(\sqrt{t}) \ln(t)}{1 + 2t^n} dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

5.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \frac{\text{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

5.3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_n^{n^2} e^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} t^5 dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

5.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}([0; a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^a \arctan(e^{nt} + 2) (e^{-nt} + 3) f(t) dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

5.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\text{ch}(t)}{t} dt$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.