

## Interrogation 7 d'entraînement

### Fonctions usuelles

#### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Tracer le graphe de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan, y faire apparaître les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
- 1.2 Énoncer la croissance comparée du logarithme en  $+\infty$ /en 0, de l'exponentielle en  $-\infty$ /en  $+\infty$ .
- 1.3 Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
- 1.4 Énoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.

#### Révisions

- 1.5 Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
- 1.6 Comment obtient-on le graphe de  $g_1 : x \mapsto f(x) + a$ ? de  $g_2 : x \mapsto f(x + a)$ ? de  $g_3 : x \mapsto af(x)$ ? de  $g_4 : x \mapsto f(ax)$ ?
- 1.7 Définir une fonction paire ou impaire. Que dire de son graphe?
- 1.8 Définir une fonction croissante et une fonction strictement décroissante.
- 1.9 Définir une fonction majorée, minorée, bornée. Caractériser par la valeur absolue le fait qu'une fonction soit bornée.
- 1.10 Définir une fonction continue en  $a$ .
- 1.11 Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 1.12 Définir une fonction dérivable en  $a$ . Quel est le lien entre continuité et dérivabilité?

#### 2. Manipuler les fonctions logarithme et exponentielle.

- 2.1 Développer  $\ln \left( (\sqrt{7})^{3/2} \sqrt[5]{2} \right) + \ln \left( \left( \frac{16}{7^{1/3}} \right)^{3/4} \right)$ .
- 2.2 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Développer  $\ln \left( \sum_{k=1}^n 3^k \right)$ .
- 2.3 Déterminer l'ensemble de définition de  $f : x \mapsto \ln(2) + \ln(\tan(x)) - \ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 - \tan(x))$  puis factoriser  $f(x)$ .
- 2.4 Déterminer le domaine de définition de  $f : x \mapsto \ln \left( \frac{(4x-1)^{1/3}}{\sin^2(x)} \right)$  puis développer  $f(x)$ .
- 2.5 Déterminer le domaine de définition de  $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(2x) - 1)$  puis développer  $f(x)$ .
- 2.6 Calculer  $(e^2)^{4\ln(2)} \left( (e^{-3})^{\ln(2)} \right)^2$ .
- 2.7 Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\frac{(e^{\cos^2(x)} \frac{1}{e - \sin^2(x)})^7}{(e^{3^2})^2}$ .
- 2.8 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\prod_{k=1}^n \frac{(e^{k^2}) (e^k)^2}{e^{-1}}$ .
- 2.9 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\prod_{k=1}^n \left( \frac{(e^{(k+1)^2})^3}{e^{3k^2}} \right)^{-2}$ .

#### 3. Calcul de limite.

- 3.1 Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (1 - x)^{1/x}$ .
- 3.2 Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \arccos(x^x - 1) - \pi}{x^x - 1}$ .
- 3.3 Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 - \cos(x^3 \ln(x))}{x^6 \ln^2(x)}$ .

3.4 Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2}$ .

3.5 Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sh}(x^3)}$

3.6 Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ .

#### 4. Simplification de fonctions.

4.1 Soit  $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) + \arctan(2x^2)$ . Déterminer  $\mathcal{D}$  le domaine de définition de  $f$  et simplifier  $f$  sur  $] -1; 1[$ .

4.2 Soit  $f : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right)$ . Déterminer  $\mathcal{D}$  le domaine de définition de  $f$  et simplifier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

4.3 Soit  $f : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$ . Déterminer  $\mathcal{D}$  le domaine de définition de  $f$  et simplifier  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

4.4 Soit  $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x))$ . Déterminer  $\mathcal{D}$  le domaine de définition de  $f$  et simplifier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ .

4.5 Soit  $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2 \arctan(\sqrt{x})$ . Déterminer  $\mathcal{D}$  le domaine de définition de  $f$  et simplifier  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

#### 5. Equations.

5.1 Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $2^{x+1} + 4^x = 15$ .

5.2 Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$   $\log_a(x) = \log_x(a)$ .

5.3 Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $2^{x^2} = 3^{x^3}$ .

5.4 Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $(\arcsin(x) - 5) \arcsin(x) = -4$ .

5.5 Démontrer que l'équation  $\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$  admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.

5.6 Démontrer que l'équation  $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$  admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.

5.7 Démontrer que l'équation  $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$  admet au plus une solution dans  $\mathbb{R}$  et préciser l'unique valeur du réel possiblement solution.

5.8 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E) :  $\arctan(x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$ .

#### 6. BONUS (ne sera pas à l'interrogation) : dérivation.

6.1 Soient  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et  $f : x \mapsto \frac{\log_a(3x-1)}{2} \sqrt{x-5}$ . Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  puis dériver  $f$ .

6.2 Soient  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et  $f : x \mapsto \operatorname{ch}(2 \log_a(\operatorname{sh}(2x)))$ . Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  puis dériver  $f$ .

6.3 Soit  $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ . Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  puis dériver  $f$ .

6.4 Soient  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  et  $f : x \mapsto \arctan(2 \log_a(3x+4))$ . Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  puis dériver  $f$ .

6.5 Soit  $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ . Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  puis dériver  $f$ .