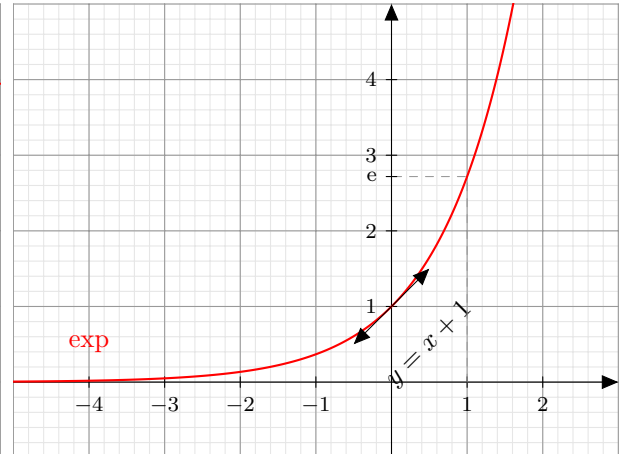
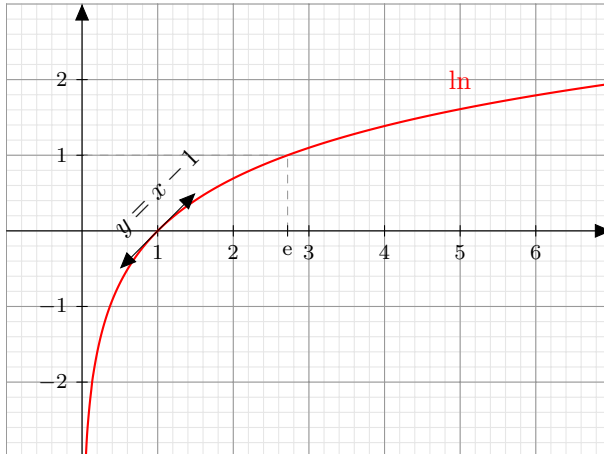


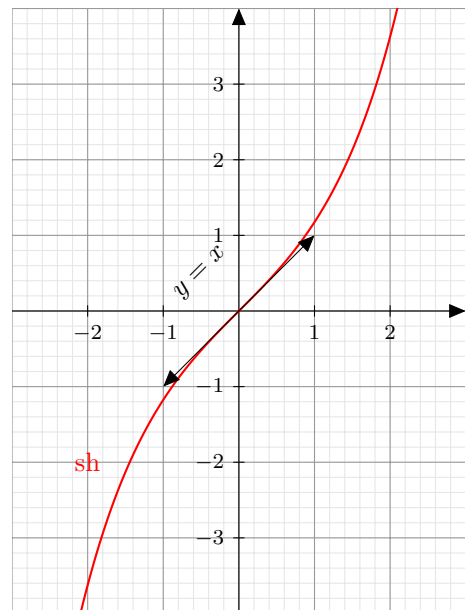
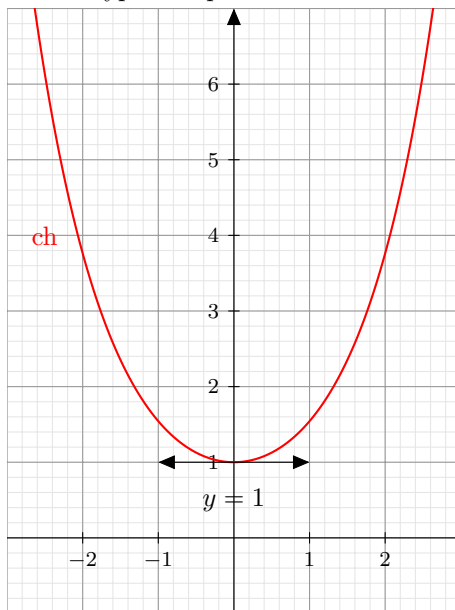
Correction de l'interrogation 7 d'entraînement Fonctions usuelles

1. Restituer le cours.

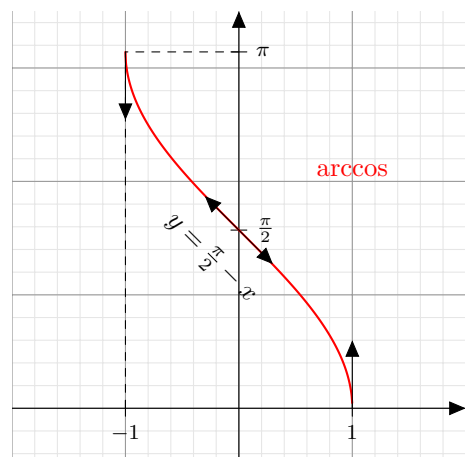
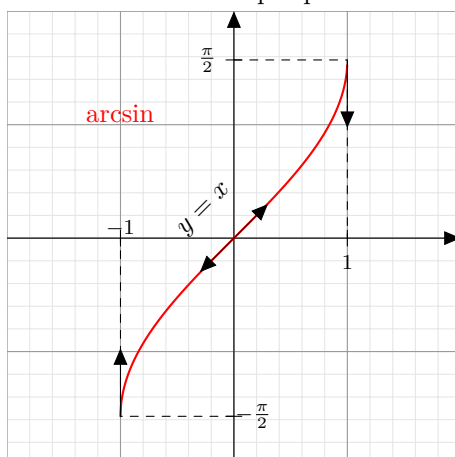
1.1 Les fonctions logarithme et exponentielle :

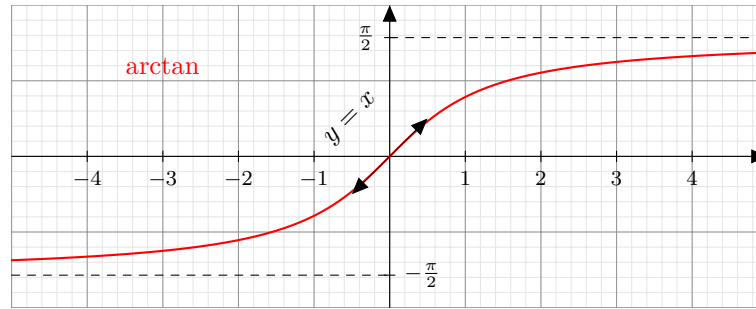


Les fonctions hyperboliques :



Les fonctions circulaires réciproques :





1.2 • Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^b |\ln(x)|^a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

• Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty.$$

- 1.3 • La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
• La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
• La fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$.
• La fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$.
• La fonction arccosinus est dérivable sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
• La fonction arcsinus est dérivable sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
• La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1.4 On a les relations suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2. Manipuler les fonctions logarithme et exponentielle.

2.1 Tous les nombres étant strictement positifs, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \ln\left(\left(\sqrt{7}\right)^{3/2} \sqrt[5]{2}\right) + \ln\left(\left(\frac{16}{7^{1/3}}\right)^{3/4}\right) &= \ln\left(7^{3/4} 2^{1/5}\right) + \ln\left(\frac{16^{3/4}}{7^{1/4}}\right) \\ &= \frac{3}{4} \ln(7) + \frac{1}{5} \ln(2) + \ln\left(\frac{2^3}{7^{1/4}}\right) \\ &= \frac{3}{4} \ln(7) + \frac{1}{5} \ln(2) + 3 \ln(2) - \frac{1}{4} \ln(7) = \frac{1}{2} \ln(7) + \frac{16}{5} \ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\ln\left(\left(\sqrt{7}\right)^{3/2} \sqrt[5]{2}\right) + \ln\left(\left(\frac{16}{7^{1/3}}\right)^{3/4}\right) = \frac{1}{2} \ln(7) + \frac{16}{5} \ln(2).}$$

2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Surtout on ne développe pas le logarithme de la somme sur lequel on ne peut rien dire. Reconnaisant une somme géométrique de raison $3 \neq 1$, on a écrit plutôt,

$$\ln\left(\sum_{k=1}^n 3^k\right) = \ln\left(3 \frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = \ln\left(3 \frac{3^n - 1}{2}\right) = \ln(3) + \ln(3^n - 1) - \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{\ln\left(\sum_{k=1}^n 3^k\right) = \ln(3) + \ln(3^n - 1) - \ln(2).}$$

2.3 Soit $f : x \mapsto \ln(2) + \ln(\tan(x)) - \ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 - \tan(x))$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) \text{ existe} \\ \tan(x) > 0 \\ 1 + \tan(x) > 0 \\ 1 - \tan(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) \text{ existe} \\ 1 > \tan(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] 0 + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right[. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right[.$$

De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{2 \tan(x)}{(1 + \tan(x))(1 - \tan(x))}\right) = \ln\left(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\right) = \ln(\tan(2x)).$$

Conclusion,

$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right[, \quad f(x) = \ln(\tan(2x)).$$

Attention : vous noterez que la fonction $x \mapsto \ln(\tan(2x))$ est définie sur un domaine plus grand que $\mathcal{D}_f$: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right[$ cela provient du fait que $\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$ peut être strictement positif lorsque les deux facteurs sont strictement négatifs. Dans ce cas l'égalité

$$\ln\left(\frac{2 \tan(x)}{(1 + \tan(x))(1 - \tan(x))}\right) = f(x)$$

est fausse mais devient

$$\ln\left(\frac{2 \tan(x)}{(1 + \tan(x))(1 - \tan(x))}\right) = \ln(2) + \ln(|\tan(x)|) - \ln(|1 + \tan(x)|) - \ln(|1 - \tan(x)|).$$

2.4 Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{(4x-1)^{1/3}}{\sin^2(x)}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ \sin^2(x) \neq 0 \\ \frac{(4x-1)^{1/3}}{\sin^2(x)} > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x \neq 0 \pmod{\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[\setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}^*\}.$$

De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \ln(4x - 1) - \ln(\sin^2(x)) \quad \text{car } x > \frac{1}{4} \text{ et } \sin^2(x) > 0 \\ &= \frac{1}{3} \ln(4x - 1) - 2 \ln(|\sin(x)|). \end{aligned}$$

Attention $\sin(x)$ n'est pas nécessairement positif!!! Conclusion,

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{1}{3} \ln(4x - 1) - 2 \ln(|\sin(x)|).$$

2.5 On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, $\text{ch}(u) > 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\text{ch}(2x) - 1 > 0$. Ainsi

la fonction $f : x \mapsto \ln(\text{ch}(2x) - 1)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \ln(\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) - 1) = \ln(2\text{sh}^2(x)) = \ln(2) + 2\ln(|\text{sh}(x)|).$$

NB : en particulier, on peut écrire

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2) + 2\ln(\text{sh}(x)) & \text{si } x > 0 \\ \ln(2) + 2\ln(-\text{sh}(x)) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \ln(2) + 2\ln(|\text{sh}(x)|).$$

2.6 On a

$$(e^2)^{4\ln(2)} \left((e^{-3})^{\ln(2)} \right)^2 = e^{8\ln(2)} e^{-6\ln(2)} = e^{2\ln(2)} = e^{\ln(4)} = 4.$$

Conclusion,

$$(e^2)^{4\ln(2)} \left((e^{-3})^{\ln(2)} \right)^2 = 4.$$

2.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{(e^{\cos^2(x)} \frac{1}{e^{-\sin^2(x)}})^7}{(e^{3^2})^2} = \frac{(e^{\cos^2(x) + \sin^2(x)})^7}{(e^9)^2} = \frac{(e^1)^7}{e^{18}} = e^{7-18} = e^{-11}.$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(e^{\cos^2(x)} \frac{1}{e^{-\sin^2(x)}})^7}{(e^{3^2})^2} = e^{-11}.$$

2.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \prod_{k=1}^n \frac{(e^{k^2}) (e^k)^2}{e^{-1}}$. On a

$$P_n = \prod_{k=1}^n (e^{k^2} e^{2k} e^1) = \prod_{k=1}^n e^{k^2 + 2k + 1} = \prod_{k=1}^n e^{(k+1)^2} = \exp \left(\sum_{k=1}^n (k+1)^2 \right).$$

NB : on aurait pu laisser la forme $k^2 + 2k + 1$ et calculer chacune des sommes mais vu comme vous aimez les changements d'indice, je vous présente cette dernière méthode. Posons $j = k + 1$. On a alors

$$\begin{aligned} P_n &= \exp \left(\sum_{j=2}^{n+1} j^2 \right) = \exp \left(\sum_{j=1}^{n+1} j^2 - 1 \right) = \exp \left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1 \right) \\ &= \exp \left(\frac{(n^2 + 3n + 2)(2n+3) - 6}{6} \right) \\ &= \exp \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6 - 6}{6} \right) \\ &= \exp \left(\frac{2n^3 + 9n^2 + 13n}{6} \right) \\ &= \exp \left(\frac{n(2n^2 + 9n + 13)}{6} \right). \end{aligned}$$

Le discriminant étant strictement négatif, nous ne pouvons pas factoriser plus.

Conclusion,

$$\prod_{k=1}^n \frac{(e^{k^2}) (e^k)^2}{e^{-1}} = e^{\frac{n(2n^2 + 9n + 13)}{6}}.$$

2.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{(k+1)^2}}{e^{3k^2}} \right)^{-2}$. On a

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(e^{3(k+1)^2 - 3k^2} \right)^{-2} = \prod_{k=1}^n e^{-6(k+1)^2 + 6k^2} = \prod_{k=1}^n \frac{e^{6k^2}}{e^{6(k+1)^2}} = \prod_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}},$$

avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = e^{6k^2}$. On reconnaît alors un produit télescopique et donc

$$P_n = \frac{u_1}{u_{n+1}} = \frac{e^6}{e^{6(n+1)^2}} = e^{6(1-(n+1)^2)} = e^{-6(n^2+2n)} = e^{-6n(n+2)}.$$

On pouvait aussi transformer le produit en une exponentielle d'une somme et y reconnaître une somme télescopique.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{e^{(k+1)^2}}{e^{3k^2}} \right)^{-2} = e^{-6n(n+2)}.$$

3. Calcul de limite.

3.1 On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (1-x)^{1/x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} e^{\frac{1}{x} \ln(1-x)}.$$

Or, on reconnaît la limite du taux d'accroissement de la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1-x)$ qui est dérivable en 0.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1-x) - \ln(1)}{x - 0} = \varphi'(0) = \frac{-1}{1-0} = -1.$$

Donc par composée de limites, on conclut

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (1-x)^{1/x} = e^{-1}.$$

3.2 On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x - 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x \ln(x)} - 1 = e^0 - 1 = 0,$$

par croissance comparée. Donc par composition, en posant $u = x^x - 1$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \arccos(x^x - 1) - \pi}{x^x - 1} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{2 \arccos(u) - \pi}{u} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} 2 \frac{\arccos(u) - \frac{\pi}{2}}{u}.$$

On reconnaît alors le taux d'accroissement de la fonction arccos qui est bien dérivable en 0. D'où,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \arccos(x^x - 1) - \pi}{x^x - 1} = 2 \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\arccos(u) - \arccos(0)}{u - 0} = 2 \arccos'(0) = \frac{-2}{\sqrt{1-0^2}} = -2.$$

Conclusion,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \arccos(x^x - 1) - \pi}{x^x - 1} = -2.$$

3.3 Par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln(x) = 0.$$

Donc en posant $u = x^3 \ln(x)$, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 - \cos(x^3 \ln(x))}{x^6 \ln^2(x)} = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2} \quad \text{d'après le cours.}$$

Conclusion,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 - \cos(x^3 \ln(x))}{x^6 \ln^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

3.4 On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^3}{\arctan(x)} e^{\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - 2 \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^3}{\arctan(x)} e^{\frac{1-2 \ln(2)}{\ln(2)} \ln(x)}$$

Or $1 < 2 \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^3}{\arctan(x)} = \frac{2e^3}{\pi}$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2} = \frac{2e^3}{\pi} \times e^{-\infty} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3+\log_2(x)}}{\arctan(x)x^2} = 0.}$$

3.5 On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Donc pour tout $x > 0$,

$$\frac{-1}{\operatorname{sh}(x^3)} \leq \frac{\cos(x)}{\operatorname{sh}(x^3)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(x^3)} \quad \text{car } \operatorname{sh}(x^3) > 0.$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x^3) = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\operatorname{sh}(x^3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(x^3)} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sh}(x^3)} = 0.}$$

3.6 En posant $u = \frac{1}{x} \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} +\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(u)}{e^{u^2}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u + e^{-u}}{2e^{u^2}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{u-u^2} + e^{-u-u^2}}{2} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u^2(1-\frac{1}{u})} + e^{-u-u^2}}{2} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{u \rightarrow +\infty} -u^2 \left(1 - \frac{1}{u}\right) = -\infty \times 1 = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} -u - u^2 = -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{e^{-\infty} + e^{-\infty}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.}$$

4. Simplification de fonctions.

4.1 Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) + \arctan 2x^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

De plus, f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme composée et somme de fonctions qui le sont et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) &= \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2} + \frac{(2x^2)'}{1 + (2x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{1 + \frac{x^2}{(x-1)^2}} + \frac{4x}{1 + 4x^4} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} + \frac{-1}{(x-1)^2 + x^2} + \frac{4x}{1 + 4x^4} \\ &= \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} + \frac{-1}{2x^2 - 2x + 1} + \frac{4x}{1 + 4x^4} \\ &= \frac{2x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 2x - 1}{4x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 2x + 2x^2 - 2x + 1} + \frac{4x}{1 + 4x^4} \\ &= \frac{-4x}{4x^4 + 1} + \frac{4x}{1 + 4x^4} \\ &= 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in]-1; 1[$, $f'(x) = 0$. Or $]-1; 1[$ est un intervalle donc, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = K.$$

Or $f(0) = 0$. Donc $K = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[, \quad f(x) = 0.}$$

Notez que l'on avait aussi,

$$\exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in]1; +\infty[, \quad f(x) = K_1.$$

Or

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) + \arctan(2x^2) \right) \\ &= \arctan(1) + \arctan(1) + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f(x) = \pi.$$

On pouvait aussi obtenir que $\forall x \in]-\infty; -1[$, $f(x) = \pi$.

4.2 Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+\sin(2x)}{2} \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}} \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) \geq -1 \text{ toujours vrai} \\ 0 \leq \sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}} \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sin(2x)}{2} \leq 1 \quad \text{car} \quad \frac{1+\sin(2x)}{2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) \leq 1 \text{ toujours vrai.} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, pour que f soit dérivable en x il suffit que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1+\sin(2x)}{2} > 0 \\ -1 < \sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}} < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) > -1 \\ \sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}} < 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) > -1 \\ \frac{1+\sin(2x)}{2} < 1 \text{ car } \frac{1+\sin(2x)}{2} \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) > -1 \\ \sin(2x) < 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}\right)^2}} \\ &= \frac{\frac{\left(\frac{1+\sin(2x)}{2}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}}}{\sqrt{1 - \frac{1+\sin(2x)}{2}}} \\ &= \frac{\frac{\cos(2x)}{2\sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{2}}}}{\sqrt{\frac{1-\sin(2x)}{2}}} \\ &= \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{\frac{1-\sin^2(2x)}{4}}} \\ &= \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\cos^2(2x)}}. \end{aligned}$$

Or $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ donc $2x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(2x) > 0$. Dès lors,

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{+2\cos(2x)} = 1.$$

Or $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ est un intervalle. Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$, $f(x) = x + K$. Or $f(0) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc $0 + K = \frac{\pi}{4}$.

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[, \quad f(x) = x + \frac{\pi}{4}.$$

Or la fonction f est continue sur son domaine de définition, ici $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont donc f est continue en $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. Donc

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4},$$

donc la formule $f(x) = x + \frac{\pi}{4}$ reste vraie en $\frac{\pi}{4}$. De même en $-\frac{\pi}{4}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) = x + \frac{\pi}{4}.$$

4.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin(\cos(x)) + \arccos(\sin(x))$ et $\mathcal{D}$ son domaine de définition. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases} \quad \text{toujours vrai.}$$

Par conséquent,

$$f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour que f soit dérivable en x , il suffit que

$$\begin{cases} -1 < \cos(x) < 1 \\ -1 < \sin(x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Donc f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos'(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} - \frac{\sin'(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} \\ &= -\frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}} - \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}}. \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$ donc

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{+\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{+\cos(x)} = -1 - 1 = -2.$$

Or $]0; \frac{\pi}{2}[$ est un intervalle donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = -2x + K.$$

Or

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $-2\frac{\pi}{4} + K = \frac{\pi}{2}$ i.e. $K = \pi$. Ainsi,

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad f(x) = \pi - 2x.$$

Or f est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions qui le sont et donc notamment en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. Donc par passage à la limite en 0, la formule reste vraie en 0 :

$$f(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \pi - 2x = \pi.$$

De même en $\frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \pi - 2x.$$

4.4 Soit $f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x))$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a les équivalences suivantes

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \cos(2x) \leq 1 \end{cases} \quad \text{toujours vrai.}$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, pour que f soit dérivable en x , il suffit d'avoir

$$\begin{aligned} \begin{cases} -1 < \cos(x) < 1 \\ -1 < \cos(2x) < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 2x \neq k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi \\ \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; 0[$. De plus pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos'(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} - \frac{(\cos(2x))'}{\sqrt{1 - \cos^2(2x)}} \\ &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}} + \frac{2\sin(2x)}{\sqrt{\sin^2(2x)}}. \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, $\sin(x) < 0$ et $2x \in]-\pi; 0[$ donc $\sin(2x) < 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin(x)}{-\sin(x)} + \frac{2\sin(2x)}{-2\sin(2x)} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Or $] -\frac{\pi}{2}; 0[$ est un intervalle donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}; 0[$ $f(x) = -2x + K$. Or

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{2} \arccos\left(\cos\left(-2\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} \arccos(0) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc $-2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + K = \frac{\pi}{2}$ i.e. $K = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[, \quad f(x) = -2x.$$

Or la fonction f est continue sur son domaine de définition comme somme et composée de fonctions qui le sont. Donc

$$f(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-2x) = 0.$$

Donc l'égalité $f(x) = -2x$ est encore vraie en 0 et de même en $\frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right], \quad f(x) = -2x.}$$

4.5 Soit $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2\arctan(\sqrt{x})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalents suivants :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ -1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \neq 0 \text{ vrai pour } x \geq 0 \\ -(1+x) \leq 1-x \leq (1+x) \text{ car pour } x \geq 0, 1+x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1-x \leq 1-x \\ 1-x \leq 1+x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq 1 \text{ OK} \\ 0 \leq 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}_+.$$

De plus, pour tout $x \geq 0$, on note que pour que f soit dérivable en x il suffit que

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \\ x > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1+x \neq 0 \text{ vrai pour } x > 0 \\ -(1+x) < 1-x < (1+x) \text{ car pour } x > 0, 1+x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 0 \\ -1-x < 1-x \\ 1-x < 1+x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq 1 \text{ OK} \\ 0 < 2x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x > 0. \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - 2\frac{(\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}^2} \\ &= -\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}}{1+x}} - 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} \\ &= \frac{2}{(1+x)^2 \frac{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}}{1+x}} - 2\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \frac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or $]0; +\infty[$ est un intervalle donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = K$. Or

$$f(1) = \arccos(0) - 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = 0.$$

Donc $K = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = 0.$$

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Donc f est continue en 0. Ainsi,

$$0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 0.}$$

5. Equations.

5.1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : 2^{x+1} + 4^x = 15$. En posant $X = 2^x$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (E) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times 2^x + 2^{2x} &= 15 & \Leftrightarrow \quad 2 \times 2^x + (2^x)^2 &= 15 \\ & & \Leftrightarrow \quad 2X + X^2 &= 15 \\ & & \Leftrightarrow \quad X^2 + 2X - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 4 \times 15 = 4 \times 16 = 64$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 (E) \quad & \Leftrightarrow X = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{OU} \quad X = \frac{-2-8}{2} = -5 \\
 & \Leftrightarrow 2^x = 3 \quad \text{OU} \quad 2^x = -5 \\
 & \Leftrightarrow e^{x \ln(2)} = 3 \quad \text{OU} \quad e^{x \ln(2)} = -5 \text{ impossible} \\
 & \Leftrightarrow x \ln(2) = \ln(3) \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.
 \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2^{x+1} + 4^x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

5.2 Soient $(a, x) \in (\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})^2$. On a

$$\begin{aligned}
 \log_a(x) = \log_x(a) & \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)} \\
 & \Leftrightarrow \ln^2(x) = \ln^2(a) \quad \text{car } \ln(x) \neq 0 \text{ et } \ln(a) \neq 0 \\
 & \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(a) \quad \text{OU} \quad \ln(x) = -\ln(a). \\
 & \Leftrightarrow x = a \quad \text{OU} \quad x = \frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\log_a(x) = \log_x(a) \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \text{OU} \quad x = \frac{1}{a}.$$

5.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 2^{x^2} = 3^{x^3} & \Leftrightarrow e^{x^2 \ln(2)} = e^{x^3 \ln(3)} \Leftrightarrow x^2 \ln(2) = x^3 \ln(3) \\
 & \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{OU} \quad \ln(2) = x \ln(3).
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$2^{x^2} = 3^{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

5.4 Soit $x \in [-1; 1]$. En posant $X = \arcsin(x)$, on a

$$\begin{aligned}
 (\arcsin(x) - 5) \arcsin(x) = -4 & \Leftrightarrow (X - 5) X = -4 \\
 & \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (X - 1)(X - 4) = 0 \\
 & \Leftrightarrow X = 1 \quad \text{OU} \quad X = 4 \\
 & \Leftrightarrow \arcsin(x) = 1 \quad \text{OU} \quad \arcsin(x) = 4.
 \end{aligned}$$

Or $\arcsin(x) = 4$ est impossible car $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \subseteq]-2; 2[$. Conclusion, pour $x \in [-1; 1]$,

$$(\arcsin(x) - 5) \arcsin(x) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin(1).$$

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les **implications** suivantes,

$$\begin{aligned} & \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow & \tan(\arctan(x) + \arctan(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \Rightarrow & \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(x+1))}{1 - \tan(\arctan(x)) \tan(\arctan(x+1))} = 1 \quad \text{car } \begin{cases} \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ \arctan(x+1) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\end{cases} \\ \Rightarrow & \frac{x + x + 1}{1 - x(x+1)} = 1 \\ \Rightarrow & 2x + 1 = 1 - x^2 - x \\ \Rightarrow & x^2 + 3x = 0 \\ \Rightarrow & x(x+3) = 0 \\ \Rightarrow & x = 0 \quad \text{OU} \quad x = -3. \end{aligned}$$

Or on remarque que si $x = -3$,

$$\arctan(x) + \arctan(x+1) = \arctan(-3) + \arctan(-2) < 0 + 0 < \frac{\pi}{4}.$$

Donc -3 n'est pas une solution. Ainsi

$$\boxed{\text{l'équation } \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4} \text{ admet au plus une solution donnée par } x = 0.}$$

NB : il est possible ici de faire la phase de synthèse. Si $x = 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(x+1) = \arctan(0) + \arctan(1) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc 0 est bien une solution. Conclusion 0 est l'unique solution de l'équation $\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$.

5.6 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$. On a

$$(E) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1; 1] \text{ et } x\sqrt{3} \in [-1; 1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Soit $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned} & \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow & \cos(\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3})) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow & \cos(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x\sqrt{3})) - \sin(\arcsin(x)) \sin(\arcsin(x\sqrt{3})) = 0 \\ \Rightarrow & \cos(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x\sqrt{3})) - x \times x\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

Soit $u = \arcsin(x)$. On sait que $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. De plus, $u = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos(u) \geq 0$. Ainsi,

$$\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

De même, on obtient que $\cos(\arcsin(x\sqrt{3})) = \sqrt{1 - 3x^2}$. Par suite,

$$\begin{aligned} (E) \quad \Rightarrow & \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - 3x^2} - x(\sqrt{3}x) = 0 \\ \Rightarrow & \sqrt{(1 - x^2)(1 - 3x^2)} = \sqrt{3}x^2 \\ \Rightarrow & (1 - x^2)(1 - 3x^2) = 3x^4 \\ \Rightarrow & 3x^4 - 4x^2 + 1 = 3x^4 \\ \Rightarrow & x^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow & x = \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Or si $x = -\frac{1}{2} < 0$, on a

$$\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) < 0 < \frac{\pi}{2}$$

donc (E) n'est pas vérifiée. Conclusion,

l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ admet au plus une solution donnée par $x = \frac{1}{2}$.

Notez qu'ici encore, les valeurs étant remarquables, il est possible de faire la synthèse complète : si $x = \frac{1}{2}$, alors on a bien

$$\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $x = \frac{1}{2}$ est bien solution. Conclusion, $x = 1/2$ est l'unique solution de $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

5.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4} &\Rightarrow \tan(\arctan(3x) + \arctan(10x)) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \\ &\Rightarrow \frac{\tan(\arctan(3x)) + \tan(\arctan(10x))}{1 - \tan(\arctan(3x))\tan(\arctan(10x))} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{3x + 10x}{1 - 3x \times 10x} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{13x}{1 - 30x^2} = -1 \\ &\Rightarrow 13x = -1 + 30x^2 \\ &\Rightarrow 30x^2 - 13x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 169 + 120 = 289 = 17^2$. Par conséquent les racines associées sont $r_1 = \frac{13-17}{60} = -\frac{4}{60} = -\frac{1}{15}$ et $r_2 = \frac{13+17}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{15} \text{ OU } x = \frac{1}{2}.$$

Or on observe que si $x = -\frac{1}{15}$ alors $5x < 3x < 0$ et donc $\arctan(3x) + \arctan(10x) < 0 < \frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, $-\frac{1}{15}$ n'est pas solution. Conclusion,

L'équation admet au plus une solution et si celle-ci existe elle vaut nécessairement $x = \frac{1}{2}$.

NB : on ne peut pas procéder directement à une synthèse ici, cependant on peut observer que la fonction $f : x \mapsto \arctan(3x) + \arctan(10x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi < \frac{3\pi}{4} < \pi = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ admet une et une seule solution. Le calcul précédent montre que la seule solution possible est $1/2$. Conclusion,

L'équation admet une unique solution donnée par $x = \frac{1}{2}$.

5.8 La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc l'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} (E) &\Rightarrow \tan(\arctan(x) + \arctan(1-x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(1-x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(1-x))} = 1 \quad \text{car } \begin{cases} \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ \arctan(1-x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{x + 1 - x}{1 - x(1-x)} = 1 \\ &\Rightarrow 1 = 1 - x + x^2 \\ &\Rightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Rightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ OU } x = 1. \end{aligned}$$

Donc les seuls réels candidats sont 0 et 1.

Réciproquement, si $x = 0$, alors

$$\arctan(x) + \arctan(1-x) = \arctan(0) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

et si $x = 1$,

$$\arctan(x) + \arctan(1-x) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $x = 0$ et $x = 1$ sont solutions. Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = \{0; 1\}.$$

6. BONUS : dérivation.

6.1 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \frac{\log_a(3x-1)}{2} \sqrt{x-5}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 5.$$

Notez que le premier connecteur est juste l'implication réciproque. En effet dans quelques exercices plus élaborés, il est possible que les problèmes de dérivabilité soient levés par des compensations ad hoc. Par exemple la fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 bien que la fonction $\sqrt{\cdot}$ ne le soit pas.

Ainsi f est dérivable sur $]5; +\infty[$. De plus pour tout $x \in]5; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x-5}}{2\ln(a)(3x-1)} + \frac{\log_a(3x-1)}{2} \frac{1}{2\sqrt{x-5}} = \frac{6(x-5) + (3x-1)\ln(3x-1)}{4\ln(a)(3x-1)\sqrt{x-5}}.$$

Conclusion, f est dérivable sur $]5; +\infty[$ et

$$\forall x \in]5; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{6(x-5) + (3x-1)\ln(3x-1)}{4\ln(a)(3x-1)\sqrt{x-5}}.$$

6.2 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \text{ch}(2\log_a(\text{sh}(2x)))$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \text{sh}(2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\log_a(\text{sh}(2x)))' \text{sh}(2\log_a(\text{sh}(2x))) = \frac{2(\text{sh}(2x))'}{\ln(a)\text{sh}(2x)} \text{sh}(2\log_a(\text{sh}(2x))) \\ &= \frac{4\text{ch}(2x)}{\ln(a)\text{sh}(2x)} \text{sh}(2\log_a(\text{sh}(2x))) \end{aligned}$$

Conclusion, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{4\text{ch}(2x)}{\ln(a)\text{sh}(2x)} \text{sh}(2\log_a(\text{sh}(2x))).$$

6.3 Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \text{ existe} &\quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 && \text{car } 1+x^2 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &\quad \Leftrightarrow \quad 1+x^2 > 1 && \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+ \\ &\quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 0. \end{aligned}$$

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - 1}{(1+x^2)^2}}} \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\frac{\sqrt{2x^2+x^4}}{1+x^2}} \quad \text{car } 1+x^2 > 0 \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)|x|\sqrt{2+x^2}} \end{aligned}$$

Conclusion, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)|x|\sqrt{2+x^2}}.$$

6.4 Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \arctan(2 \log_a(3x+4))$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad 3x+4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{4}{3}.$$

Donc f est dérivable sur $]-\frac{4}{3}; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-\frac{4}{3}; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{(2 \log_a(3x+4))'}{1 + 4 \log_a^2(3x+4)} = \frac{\frac{2 \times 3}{\ln(a)(3x+4)}}{1 + 4 \log_a^2(3x+4)} = \frac{6}{\ln(a)(3x+4)(1 + 4 \log_a^2(3x+4))}.$$

Conclusion, f est dérivable sur $]-\frac{4}{3}; +\infty[$ et

$$\forall x \in]-\frac{4}{3}; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{6}{\ln(a)(3x+4)(1 + 4 \log_a^2(3x+4))}.$$

6.5 Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$f'(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in]-1; 1[\\ \arccos(x) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1; 1[.$$

Donc f est dérivable sur $]-1; 1[$. De plus pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$f'(x) = \frac{\arcsin'(x) \arccos(x) - \arcsin(x) \arccos'(x)}{\arccos^2(x)} = \frac{\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^2(x)} = \frac{\arccos(x) + \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2} \arccos^2(x)}.$$

Conclusion, f est dérivable sur $]-1; 1[$ et

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad f'(x) = \frac{\arccos(x) + \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2} \arccos^2(x)}.$$