

Interrogation 9 d'entraînement Calcul d'intégrales

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir une fonction $\mathcal{C}^1$.
- 1.2 Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- 1.3 Énoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
- 1.4 Énoncer la croissance de l'intégrale.
- 1.5 Énoncer la séparation de l'intégrale.
- 1.6 Énoncer le théorème d'intégration par parties.
- 1.7 Énoncer le théorème de changement de variable.

Révisions

- 1.8 Développer $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$.
- 1.9 Linéariser $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.
- 1.10 Factoriser $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- 1.11 Valeurs remarquables du sinus, cosinus, tangente.
- 1.12 Limites remarquables.
- 1.13 Dresser les variations de sinus, cosinus et tangente sur $[0; 2\pi]$.
- 1.14 Donner les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions sinus, cosinus, tangente.
- 1.15 Énoncer les formules de l'angle moitié.

2. Reconnaître une primitive/Savoir dériver. Sans justification, ni d'étude de domaine de définition, donner les primitives des fonctions suivantes.

2.1 $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}}.$

2.2 $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-9\ln^2(x)}}.$

2.3 $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$

2.4 $x \mapsto x^2 5^{x^3}.$

2.5 $x \mapsto \frac{\text{sh}\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2}.$

2.6 $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$

2.7 $x \mapsto e^{3x} \text{ch}(e^{3x}).$

2.8 $x \mapsto 3 \ln(x) (x \ln(x) - x).$

2.9 $x \mapsto x\pi^{x^2}.$

2.10 $x \mapsto \cos(2x+1) e^{\sin(2x+1)}.$

2.11 $x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}^2(x)}.$

2.12 $x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}.$

2.13 $x \mapsto \frac{1}{4x \ln(4x)}.$

2.14 $x \mapsto \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}.$

2.15 $x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}^3(x)}.$

2.16 $x \mapsto \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$

Sans justification, ni d'étude de domaine de dérivabilité, donner les dérivées des fonctions suivantes.

2.21 $x \mapsto \ln(x^2 e^x).$

2.22 $x \mapsto e^{\text{sh}^2(x)}.$

2.23 $x \mapsto \arcsin(x^{3x}).$

2.24 $x \mapsto \tan(\cos(\text{sh}(x))).$

2.25 $x \mapsto \ln(3 + e^{5x^2}).$

2.26 $x \mapsto \arcsin(\arccos(x)).$

2.27 $x \mapsto \frac{e^{3x}}{1-5x^2}.$

2.28 $x \mapsto \ln(\sin(x)) \ln(\text{sh}(x^2)).$

2.29 $x \mapsto \ln(\text{ch}^2(x)).$

2.30 $x \mapsto \tan(\text{sh}^3(2x)).$

2.31 $x \mapsto (\ln(x))^{x^2}.$

2.32 $x \mapsto e^{2x} \tan(3x).$

2.33 $x \mapsto \sqrt{1 + \arctan^2(x)}.$

2.34 $x \mapsto \pi^{\cos(x)}.$

2.35 $x \mapsto \arctan(\ln^3(x)).$

2.36 $x \mapsto e^{e^x}.$

3. Savoir faire une intégration par parties.

- 3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt$ existe puis exprimer I_{n+1} en fonction de I_n à l'aide d'une intégration par parties.
- 3.2 Justifier que $I = \int_0^{1/2} e^{\arccos(x)} dx$ existe puis la calculer à l'aide de **deux** intégrations par parties.
- 3.3 Justifier que $I = \int_{-\pi}^0 \cos(a) \operatorname{ch}(a) da$ existe puis la calculer à l'aide de **deux** intégrations par parties.
- 3.4 Justifier que $I = \int_2^3 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$ existe puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.
- 3.5 Justifier que $I = \int_0^1 \theta \arctan^2(\theta) d\theta$ existe puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

4. Savoir faire un changement de variable.

- 4.1 Justifier que $f : x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(x) - 1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $y = e^x$.
- 4.2 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} \operatorname{ch}(x)$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide d'un changement de variable.
- 4.3 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ admet des primitives sur $]0; \pi[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
- 4.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ admet des primitives sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $a = \tan(x)$.
- 4.5 Justifier que $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $\theta = \sqrt{1+x^6}$.

5. Manipulation du petit o.

- 5.1 Soit $A(x) = o\left(x^3 + 4x^2\right) + x^3 o\left(\cos(x) + \frac{1}{x}\right)$. Simplifier $A(x)$.
- 5.2 Soit $B(x) = o\left(3x + o(\ln(x))\right) + o(e^x) + 7x^3$. Simplifier $B(x)$.
- 5.3 Soit $C(x) = o\left(x^3 - 2o(\ln(x)) + e^{2x}\right) + o(\sqrt{x})$. Simplifier $C(x)$.
- 5.4 Soit $D(x) = \cos(x) - 8o(1) o(\sqrt{x}) + o(\ln(x + e^x))$. Simplifier $D(x)$.
- 5.5 Soit $E(x) = o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + o(e^x) + 5o\left(\frac{1}{\sin(x-1)}\right) + o(x-1)$. Simplifier $E(x)$.
Poser le changement de variable $h = x - 1$.