

Correction de l'interrogation 9 d'entraînement Calcul d'intégrales

1. Restituer le cours.

1.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ sur I noté $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si

- f est dérivable sur I
- f' est continue sur I .

1.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $A \in \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Si f est continue sur I alors la fonction F définie par

$$F : \begin{array}{lcl} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & A + \int_a^x f(t) dt, \end{array}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.

1.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

1.4 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et $(f, g) \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})^2$ telles que

$$\forall t \in [a; b], \quad f(t) \leq g(t).$$

Alors,

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

1.5 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que

- La fonction f est continue sur $[a; b]$,
- la fonction f est positive sur $[a; b]$,
- $\int_a^b f(t) dt = 0$.

Alors pour tout $t \in [a; b]$, $f(t) = 0$.

1.6 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

1.7 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \rightarrow J$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I , $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur J . Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

2. Reconnaître une primitive/Savoir dériver. Dans chaque cas, l'ensemble des primitives est donné par :

2.1 $\left\{ x \mapsto \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\sqrt{5}x} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.2 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{3} \arcsin(3 \ln(x)) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.3 $\left\{ x \mapsto \arctan(e^x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.4 $\left\{ x \mapsto \frac{5x^3}{3 \ln(5)} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.5 $\left\{ x \mapsto \frac{-1}{3} \operatorname{ch}\left(\frac{3}{x}\right) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

2.6 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|1 + x^2|) + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$

$$2.7 \left\{ x \mapsto \frac{1}{3} \operatorname{sh}(e^{3x}) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.9 \left\{ x \mapsto \frac{\pi x^2}{2 \ln(\pi)} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.11 \left\{ x \mapsto \arctan(\operatorname{ch}(x)) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.13 \left\{ x \mapsto \frac{1}{4} \ln(|\ln(4x)|) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.15 \left\{ x \mapsto -\frac{1}{2 \operatorname{sh}^2(x)} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans chaque cas, la dérivée est :

$$2.21 x \mapsto \frac{2+x}{x}.$$

$$2.23 x \mapsto \frac{3(\ln(x)+1)x^{3x}}{\sqrt{1-x^{6x}}}.$$

$$2.25 x \mapsto \frac{10x e^{5x^2}}{3+e^{5x^2}}.$$

$$2.27 x \mapsto \frac{(3+10x-15x^2)e^{3x}}{(1-5x^2)^2}.$$

$$2.29 x \mapsto \frac{2 \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

$$2.31 x \mapsto \left(2x \ln(\ln(x)) + \frac{x}{\ln(x)} \right) (\ln(x))^{x^2}.$$

$$2.33 x \mapsto \frac{\arctan(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+\arctan^2(x)}}.$$

$$2.35 x \mapsto \frac{3 \ln^2(x)}{x(1+\ln^6(x))}.$$

$$2.8 \left\{ x \mapsto \frac{3}{2} (x \ln(x) - x)^2 + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.10 \left\{ x \mapsto \frac{1}{2} e^{\sin(2x+1)} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.12 \left\{ x \mapsto \ln(|\sin(x)|) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.14 \left\{ x \mapsto \ln(|2x^2 + 3x + 5|) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.16 \left\{ x \mapsto -\frac{1}{2} \arccos^2(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.22 x \mapsto 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x) e^{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

$$2.24 x \mapsto -\frac{\operatorname{ch}(x) \sin(\operatorname{sh}(x))}{\cos^2(\cos(\operatorname{sh}(x)))}.$$

$$2.26 x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\arccos^2(x))}}.$$

$$2.28 x \mapsto \frac{\cos(x) \ln(\operatorname{sh}(x^2))}{\sin(x)} + \frac{2x \operatorname{ch}(x^2) \ln(\sin(x))}{\operatorname{sh}(x^2)}.$$

$$2.30 x \mapsto \frac{6 \operatorname{ch}(2x) \operatorname{sh}^2(2x)}{\cos^2(\operatorname{sh}^3(2x))}.$$

$$2.32 x \mapsto (3 + 2 \tan(3x) + 3 \tan^2(3x)) e^{2x}.$$

$$2.34 x \mapsto -\ln(\pi) \sin(x) \pi^{\cos(x)}.$$

$$2.36 x \mapsto e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}.$$

3. Savoir faire une intégration par parties.

3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^{n+1} e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $[0; 1]$. Donc I_{n+1} existe. Posons pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\begin{cases} u(t) = e^t \\ v(t) = t^{n+1}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et pour tout $t \in [0; 1]$,

$$\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v'(t) = (n+1) t^n. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt = [t^{n+1} e^t]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (n+1) t^n e^t dt = e - 0 - (n+1) I_n.$$

Conclusion,

$$I_{n+1} = e - (n+1) I_n.$$

3.2 La fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est continue sur $[-1; 1]$ donc $x \mapsto e^{\arccos(x)}$ est continue sur $[0; \frac{1}{2}]$ et donc I existe. Posons pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$,

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^{\arccos(x)}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{1}{2}] \subseteq]-1; 1[$ et pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} e^{\arccos(x)} dx = \left[x e^{\arccos(x)} \right]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{1/2} \frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}} x dx \\ &= \frac{e^{\arccos(1/2)}}{2} - 0 + \int_0^{1/2} \frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}} x dx \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{2} + \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arccos(x)} dx. \end{aligned}$$

On pose pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$,

$$\begin{cases} u(x) = -\sqrt{1-x^2} \\ v(x) = e^{\arccos(x)}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{1}{2}] \subseteq]-1; 1[$ et pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'(x) = -\frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Donc par une seconde intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{2} + \left[-\sqrt{1-x^2} e^{\arccos(x)} \right]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} \frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} e^{\frac{\pi}{3}} + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{1/2} e^{\arccos(x)} dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{\frac{\pi}{3}} - I. \end{aligned}$$

Donc $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{\frac{\pi}{3}}$. Conclusion,

$$I = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{\frac{\pi}{3}}.$$

3.3 La fonction $a \mapsto \cos(a) \operatorname{ch}(a)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi; 0]$. Donc I existe. Posons pour tout $a \in [-\pi; 0]$,

$$\begin{cases} u(a) = \sin(a) \\ v(a) = \operatorname{ch}(a). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi; 0]$ et pour tout $a \in [-\pi; 0]$,

$$\begin{cases} u'(a) = \cos(a) \\ v'(a) = \operatorname{sh}(a). \end{cases}$$

Ainsi, par une intégration par parties,

$$I = \int_{-\pi}^0 \cos(a) \operatorname{ch}(a) da = [\sin(a) \operatorname{ch}(a)]_{a=-\pi}^{a=0} - \int_{-\pi}^0 \sin(a) \operatorname{sh}(a) da = - \int_{-\pi}^0 \sin(a) \operatorname{sh}(a) da.$$

On pose alors pour tout $a \in [-\pi; 0]$,

$$\begin{cases} u(a) = -\cos(a) \\ v(a) = \operatorname{sh}(a). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi; 0]$ et pour tout $a \in [-\pi; 0]$,

$$\begin{cases} u'(a) = \sin(a) \\ v'(a) = \operatorname{ch}(a). \end{cases}$$

Par une seconde intégration par parties, on trouve

$$I = -[-\cos(a) \operatorname{sh}(a)]_{a=-\pi}^{a=0} + \int_{-\pi}^0 -\cos(a) \operatorname{ch}(a) da = -(\operatorname{sh}(-\pi) + 0) - I = \operatorname{sh}(\pi) - I.$$

D'où, $2I = \text{sh}(\pi)$. Conclusion,

$$I = \frac{\text{sh}(\pi)}{2}.$$

3.4 Pour tout $x \geq 2$, $x^2 - 1 > 0$. Donc $\sqrt{x^2 - 1}$ existe et $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq x \geq 2 > 0$. Donc $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ existe. Ainsi la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est bien définie sur $[2; 3] \subseteq [2; +\infty[$ et est même continue sur $[2; 3]$ car composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Donc I existe. Posons alors pour tout $x \in [2; 3]$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[2; 3]$ car pour tout $x \geq 2$, $x^2 - 1 > 0$ et donc $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[2; 3]$. De plus, pour tout $a \in [2; 3]$,

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{cases}$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \, dx = \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \\ &= 3 \ln(3 + \sqrt{8}) - 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \left[\sqrt{x^2 - 1} \right]_{x=2}^{x=3} \\ &= 3 \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{8} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$I = 3 \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

3.5 La fonction $\theta \mapsto \theta \arctan^2(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1]$ donc I existe. Posons pour tout $\theta \in [0; 1]$

$$\begin{cases} u(\theta) = \frac{\theta^2}{2} \\ v(\theta) = \arctan^2(\theta). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et pour tout $\theta \in [0; 1]$,

$$\begin{cases} u'(\theta) = \theta \\ v'(\theta) = \frac{2 \arctan(\theta)}{1 + \theta^2} \end{cases}$$

Donc par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \theta \arctan^2(\theta) \, d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2} \arctan^2(\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=1} - \int_0^1 \frac{\theta^2}{2} \frac{2 \arctan(\theta)}{1 + \theta^2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \arctan^2(1) - 0 - \int_0^1 \frac{\theta^2 + 1 - 1}{1 + \theta^2} \arctan(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(\theta) - \frac{\arctan(\theta)}{1 + \theta^2} \, d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan(\theta) \, d\theta + \int_0^1 \frac{\arctan(\theta)}{1 + \theta^2} \, d\theta. \end{aligned}$$

Posons pour tout $\theta \in [0; 1]$

$$\begin{cases} u(\theta) = \theta \\ v(\theta) = \arctan(\theta). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et pour tout $\theta \in [0; 1]$,

$$\begin{cases} u'(\theta) = 1 \\ v'(\theta) = \frac{1}{1 + \theta^2}. \end{cases}$$

Alors par une intégration par parties dans la première intégrale,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^2}{32} - [\theta \arctan(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=1} + \int_0^1 \frac{\theta}{1+\theta^2} d\theta + \left[\frac{\arctan^2(\theta)}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=1} \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2} \ln(|1+\theta^2|) \right]_{\theta=0}^{\theta=1} + \frac{\pi^2}{32} \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2) - \ln(1)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$I = \frac{\pi^2 - 4\pi + 8\ln(2)}{16}.$$

4. Savoir faire un changement de variable.

4.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1$ et donc $\text{ch}(x) - 1 \geq 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et donc admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+$ dont l'une est donnée par le théorème fondamentale de l'analyse par

$$F : \quad x \mapsto \int_0^x \sqrt{\text{ch}(t) - 1} dt.$$

Soient $x \in \mathbb{R}_+$. Alors,

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\text{ch}(t) - 1} dt = \int_0^x \sqrt{\frac{e^t + e^{-t} - 2}{2}} dt.$$

On pose pour tout $t \in [0; x]$ (ou $[x; 0]$), $y = e^t$ i.e. pour tout $y \in [1; e^x]$ (ou $[e^x; 1]$, $t = \varphi(y) = \ln(y)$). La fonction φ est bien définie et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1; e^x]$ et $dt = \varphi'(y) dy = \frac{dy}{y}$. Donc,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{e^x} \sqrt{\frac{y + \frac{1}{y} - 2}{2}} \frac{1}{y} dy \\ &= \int_1^{e^x} \sqrt{\frac{y^2 - 2y + 1}{2y}} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{e^x} \frac{|y-1|}{y^{3/2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{e^x} \frac{y-1}{y^{3/2}} dy \quad \text{car } y \geq 1 \text{ car } x \geq 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{e^x} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{y^{3/2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2\sqrt{y} + \frac{2}{\sqrt{y}} \right]_{y=1}^{y=e^x} \\ &= \sqrt{2} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - 2) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

NB : on se rend compte a posteriori que l'on pouvait obtenir ce résultat directement par les formules sur les fonctions hyperboliques : on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\text{ch}(t) - 1} &= \sqrt{\text{ch}^2\left(\frac{t}{2}\right) + \text{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1} = \sqrt{\text{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) + 1 + \text{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1} \\ &= \sqrt{2\text{sh}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \sqrt{2} \text{sh}\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{car } t \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{2} \text{sh}\left(\frac{t}{2}\right) dt = \left[2\sqrt{2} \text{ch}\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=x} = 2\sqrt{2} \left(\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right).$$

Conclusion, f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ données par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\sqrt{2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \operatorname{sh}^2(x) \geq 1 > 0$. Donc f est bien définie et continue et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \quad x \mapsto \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sh}(t)}{1 + \operatorname{sh}^2(t)} \operatorname{ch}(t) dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sh}(t)}{1 + \operatorname{sh}^2(t)} \operatorname{ch}(t) dt.$$

On pose pour tout $u \in [0; x]$ (ou $[x; 0]$), $u = \varphi(t) = \operatorname{sh}(t)$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; x]$ et $du = \varphi'(t) dt = \operatorname{ch}(t) dt$. Donc,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\operatorname{sh}(x)} \frac{1+u}{1+u^2} du \\ &= \int_0^{\operatorname{sh}(x)} \frac{1}{1+u^2} du + \int_0^{\operatorname{sh}(x)} \frac{u}{1+u^2} du \\ &= [\arctan(u)]_{u=0}^{u=\operatorname{sh}(x)} + \left[\frac{1}{2} \ln(|1+u^2|) \right]_{u=0}^{u=\operatorname{sh}(x)} \\ &= \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{sh}^2(x)) \\ &= \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ch}^2(x)) \\ &= \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \ln(\operatorname{ch}(x)) \quad \text{car } \operatorname{ch}(x) > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ données par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \ln(\operatorname{ch}(x)) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.3 Pour tout $x \in]0; \pi[$, $\sin(x) > 0$. Donc f est continue sur $]0; \pi[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \quad x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin(t)} dt.$$

Soit $x \in]0; \pi[$. On a

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin(t)} dt.$$

Pour tout $t \in [\frac{\pi}{2}; x]$ ou $[x; \frac{\pi}{2}]$, on pose $s = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ qui est bien défini car $[\frac{\pi}{2}; x] \subseteq]0; \pi[$ et donc pour $t \in [\frac{\pi}{2}; x] \subseteq]0; \pi[$, on a bien $\frac{t}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[\subseteq \mathcal{D}_{\tan}$. De façon équivalente, on pose pour tout $s \in [1; \tan(\frac{x}{2})]$ (ou $[\tan(\frac{x}{2}); 1]$), $t = \varphi(s) = 2 \arctan(s)$. La fonction φ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[1; \tan(\frac{x}{2})]$ et on a $dt = \varphi'(s) ds = \frac{2}{1+s^2} ds$. De plus, par les formules de l'angle moitié, on sait que $\sin(t) = \frac{2s}{1+s^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\tan(\frac{\pi}{4})}^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1+s^2}{2s} \frac{2}{1+s^2} ds \\ &= \int_1^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{s} ds \\ &= [\ln(|s|)]_{s=1}^{s=\tan(\frac{x}{2})} \\ &= \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{car } \tan\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \text{ car } x \in]0; \pi[. \end{aligned}$$

Conclusion, f admet des primitives sur $]0; \pi[$ données par l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \sin^2(x) \geq 1 > 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et admet donc des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \quad x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1 + \sin^2(t)} dt.$$

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + \sin^2(t)} dt.$$

On pose pour tout $t \in [0; x]$ (ou $[x; 0]$), $a = \tan(t)$ qui est bien défini car $[0; x] \subseteq]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\subseteq \mathcal{D}_{\tan}$. De façon équivalente, on pose pour tout $a \in [0; \tan(x)]$ (ou $[\tan(x); 0]$) $t = \varphi(a) = \arctan(a)$. La fonction φ est bien définie et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; \tan(x)]$ et $dt = \varphi'(a) da = \frac{da}{1+a^2}$. De plus $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(t)}$ (formule de la dérivée de la fonction tangente). Donc $\sin^2(t) = 1 - \frac{1}{1+a^2} = \frac{a^2}{1+a^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1 + \frac{a^2}{1+a^2}} \frac{1}{1+a^2} da \\ &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+2a^2} da \\ &= \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1 + (\sqrt{2}a)^2} da \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}a) \right]_{a=0}^{a=\tan(x)} \\ &= \frac{\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan(x))}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, f admet des primitives sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ données par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan(x))}{2} + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.5 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + x^6 \geq 1 > 0$ et $x \neq 0$. Donc f est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \quad x \mapsto \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^6}}{t} dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^6}}{t} dt.$$

On pose pour tout $t \in [1; x] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ (ou $[x; 1]$), $\theta = \sqrt{1+t^6}$ ou encore pour tout $\theta \in [\sqrt{2}; \sqrt{1+x^6}]$ (ou $[\sqrt{1+x^6}; \sqrt{2}]$) $t = \varphi(\theta) = (\theta^2 - 1)^{1/6}$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ donc sur $[\sqrt{2}; \sqrt{1+x^6}]$ et $dt = \varphi'(\theta) d\theta = \frac{2\theta}{6(\theta^2-1)^{5/6}} d\theta = \frac{\theta}{3(\theta^2-1)^{5/6}} d\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta}{(\theta^2 - 1)^{1/6}} \frac{\theta}{3(\theta^2 - 1)^{5/6}} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} d\theta. \end{aligned}$$

On commence par « extraire la partie entière de la fraction » en remarquant que $\theta^2 = \theta^2 - 1 + 1$, puis on décompose en éléments simples :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1}{\theta^2 - 1} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1}{(\theta - 1)(\theta + 1)} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x^6}} 1 + \frac{1/2}{\theta - 1} - \frac{1/2}{\theta + 1} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \left[\theta + \frac{1}{2} \ln(|\theta - 1|) - \frac{1}{2} \ln(|\theta + 1|) \right]_{\theta=\sqrt{2}}^{\theta=\sqrt{1+x^6}} \\ &= \frac{1}{3} \left[\theta + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\theta - 1}{\theta + 1} \right) \right]_{\theta=\sqrt{2}}^{\theta=\sqrt{1+x^6}} \quad \text{car } \theta + 1 \geq \theta - 1 > 0. \\ &= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^6} - 1}{\sqrt{1+x^6} + 1} \right) - \underbrace{\frac{1}{3} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \right)}_{=C_1}. \end{aligned}$$

Simplifions un peu notre résultat. Posons $C_1 = \frac{1}{3} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(\sqrt{1+x^6} - 1)^2}{(\sqrt{1+x^6} + 1)(\sqrt{1+x^6} - 1)} \right) - C_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(\sqrt{1+x^6} - 1)^2}{1+x^6-1} \right) - C_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(\sqrt{1+x^6} - 1)^2}{x^6} \right) - C_1 \\ &= \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^6} - 1}{x^3} \right) - C_1 \end{aligned}$$

Conclusion, f admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ données par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{3} + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^6} - 1}{x^3} \right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Manipulation du petit o .

5.1 Soit $A(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3 + 4x^2) + x^3 o(\cos(x) + \frac{1}{x})$. Puisque $x^3 \underset{x \rightarrow 0}{\ll} 4x^2$, on a $o(x^3 + 4x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(4x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. De plus $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ tandis que $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \pm\infty$ donc $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \frac{1}{x}$ et $o(\cos(x) + \frac{1}{x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\frac{1}{x})$. Par suite, $x^3 o(\cos(x) + \frac{1}{x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 o(\frac{1}{x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Ainsi,

$$A(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2).$$

Conclusion,

$$A(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2).$$

5.2 Soit $B(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(3x + o(\ln(x))) + o(e^x) + 7x^3$. On a $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} 3x$ et donc a fortiori, $o(\ln(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} 3x$. Ainsi, $o(3x + o(\ln(x))) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(3x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$. De plus $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} e^x$ et donc $o(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} e^x$ i.e. $o(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$. De même $7x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$. Donc

$$B(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x) + o(e^x) + o(e^x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x).$$

Conclusion,

$$B(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x).$$

5.3 Soit $C(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3 - 2o(\ln(x)) + e^{2x}) + o(\sqrt{x})$. On observe que $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$, $x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Par conséquent, $x^3 \underset{x \rightarrow 0}{\ll} e^{2x} \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \ln(x)$. Ainsi,

$$x^3 - 5o(\ln(x)) + e^{2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x)) - 2o(\ln(x)) + o(\ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x))$$

et non 0!!!! Ainsi,

$$o(x^3 - 2o(\ln(x)) + e^{2x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(o(\ln(x))) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x)).$$

Enfin, $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \ln(x)$ donc

$$C(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x)) + o(\ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x)).$$

Conclusion,

$$C(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln(x)).$$

5.4 Soit $D(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \cos(x) - 8o(1) o(\sqrt{x}) + o(\ln(x + e^x))$. On observe que pour tout $x > 0$,

$$\ln(x + e^x) = \ln(e^x) + \ln(1 + x e^{-x}) = x + \ln(1 + x e^{-x}).$$

Or par croissance comparée, $x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc $1 + x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, $\ln(1 + x e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc notamment $\ln(1 + x e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x$. Ainsi,

$$o(\ln(x + e^x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x + \ln(1 + x e^{-x})) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

D'autre part, $\cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x$ donc

$$D(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x) + o(\sqrt{x}) + o(x).$$

Puisque $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x$, on conclut que

$$D(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

5.5 Soit $E(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + o(e^x) + 5o\left(\frac{1}{\sin(x-1)}\right) + o(x-1)$. Posons $h = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Alors,

$$E(x) \underset{h \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right) + o(e^{h+1}) + 5o\left(\frac{1}{\sin(h)}\right) + o(h).$$

On sait que $\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ donc $\frac{\frac{1}{\sin(h)}}{\frac{1}{h^2}} = \frac{h}{\sin(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$ autrement dit $\frac{1}{\sin(h)} \underset{h \rightarrow 0}{\ll} \frac{1}{h^2}$. D'où,

$$o\left(\frac{1}{h^2}\right) + 5o\left(\frac{1}{\sin(h)}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

De plus, $e^{h+1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e$ et $h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Donc $h \underset{h \rightarrow 0}{\ll} e^{h+1} \underset{h \rightarrow 0}{\ll} \frac{1}{h^2}$. D'où,

$$E(x) \underset{h \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right) + o\left(\frac{1}{h^2}\right) + o\left(\frac{1}{h^2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

On n'oublie pas de revenir à la variable initiale :

$$E(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$