Interrogation de révision 07 d'entrainement Ensembles et applications, continuité et dérivabilité

1. **Restituer le cours : ensembles et applications**
   1.1 Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
   1.2 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
   1.3 Définir l'injectivité et la surjectivité.
   1.4 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).
2. **Restituer le cours : continuité et dérivabilité**
   2.1 Enoncer le théorème d'encadrement.
   2.2 Enoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
   2.3 Enoncer le théorème des bornes atteintes.
   2.4 Enoncer l'identité des accroissements finis.
3. **Manipuler les applications**
   3.1 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. Montrer que $g \circ f$ est surjective implique que g est surjective.
   3.2 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(F,G)$ injective. Montrer que pour tout $(g,h) \in \mathscr{F}(E,F)$, on a $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.
   3.3 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ injective. Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   3.4 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ surjective. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(F)$, $\overline{f(A)} \subseteq f\left(\overline{A}\right)$.
   3.5 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective.
4. **Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$**
   4.1 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
   4.2 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
   4.3 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
   4.4 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
   4.5 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$.