Interrogation de révision 09 d'entrainement espaces vectoriels et familles de vecteurs

1. **Restituer le cours : espaces vectoriels**
   1.1 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
   1.2 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
   1.3 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
   1.4 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   1.5 Enoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.
2. **Restituer le cours : familles de vecteurs**
   2.1 Définir et caractériser une famille libre.
   2.2 Définir et caractériser une famille liée.
   2.3 Définir une famille génératrice.
   2.4 Définir et caractériser une base.
   2.5 Enoncer le théorème de la base adaptée.
3. **Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires**
   3.1 Montrer que $F = \{\, f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R} \,\}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   3.2 Montrer que $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   3.4 Montrer que $F = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0 \,\}$ et $G = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \,\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
   3.5 Montrer que $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f'' + 3f' + 7f = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. **Déterminer si une famille est libre ou liée.**
   5.1 Déterminer si $\mathscr{L} = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est libre ou liée.
   5.2 Déterminer si $\mathscr{L} = \left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.
   5.3 Soient $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille libre de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs d'un espace vectoriel E. On pose pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $v_i = \sum_{j=1}^{i} u_j$. Montrer que $\mathscr{L} = (v_1, \dots, v_p)$ est libre.
   5.4 Montrer que $\mathscr{L} = \left(X(X-1)^2, X^2(X-1), X^3, (X-1)^3\right)$ est libre.
   5.5 Déterminer si $\mathscr{L} = (x \mapsto |x|, x \mapsto |x-1|, x \mapsto |x+1|)$ est libre ou liée.
   5.6 Déterminer si $\mathscr{L} = \left(x \mapsto \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)\right)_{k \in [\![0;3]\!]}$ est libre ou liée.