

Interrogation de révision 10
d'entraînement
dimension et séries

1. Restituer le cours : séries

- 1.1 Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général? Donner un contre-exemple à la réciproque.
- 1.2 Énoncer le théorème sur les séries de Riemann.
- 1.3 Énoncer le théorème de comparaison.
- 1.4 Énoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
- 1.5 Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée? Contre-exemple de la réciproque?

2. Restituer le cours : dimension finie

- 2.1 Énoncer le théorème de la base extraite.
- 2.2 Énoncer le théorème de la base incomplète.
- 2.3 Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
- 2.4 Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
- 2.5 Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
- 2.6 Énoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.

3. Nature d'une série par équivalents

- 3.1 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n + 3^n}{5n^3 - \ln(n) + 5^n}$.
- 3.2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$.
- 3.3 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}$.
- 3.4 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.
- 3.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = - \left[2 \ln \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) + \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right]$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

4. Calculer un rang.

- 5.1 Soit $\mathcal{F} = (3 + X + X^2, 5 - 2X^2, 3X + X^2, 1 - X + X^2)$. Calculer le rang de \mathcal{F} .
- 5.2 Soit $\mathcal{F} = ((1, 0, -2), (4, 2, 1), (-1, 3, 1), (0, 3, 3))$. Calculer le rang de \mathcal{F} .
- 5.3 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = 2$ et $\mathcal{F} = (P, P', P'', P^{(3)}, P^{(4)})$. Calculer le rang de \mathcal{F} .
- 5.4 Calculer le rang de $\mathcal{F} = ((2)_{n \in \mathbb{N}}, (n!)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}}, (5 + 2n)_{n \in \mathbb{N}})$.
- 5.5 Soient $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et $E = \mathcal{F}([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R})$. On considère dans E la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \cos(x), x \mapsto x^2 \cos(x))$. Montrer que \mathcal{F} est libre et en déduire son rang.
Indication : un tout petit DL...