

Exercice autonome 01

Bijection

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f: x \rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

On nomme DP le domaine de définition de f .

Ainsi $x \in DP \Leftrightarrow f(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \geq 0$ ✓ Soit Δ le discriminant de $x^2 - 4x + 5$, on a $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$, donc le polynôme est de signe constant, et $f(1) = 1 - 4 + 5 = 2$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0$ ✓

Donc $DP = \mathbb{R}$ ✓

2. D'après la question précédente f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0$, ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est même dérivable comme composée de fonctions qui le sont. Bof

De plus Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ ✓

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	$\emptyset$	$+$
$\sqrt{x^2 - 4x + 5}$	$+$	$+$	$+$
Signe de $f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$

✓

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 4x + 5 = +\infty (x)$ par composition,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ✓

De plus, $f(2) = \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 + 5} = \sqrt{1} = 1$ ✓

De plus, $f(x) = \sqrt{x(x-4)+5}$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-4)+5 = +\infty (x)$ par composition,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ✓

On a alors le tableau de variation de f suivant:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
Var f	$+\infty$	1	$+\infty$

TB

3. Soit g la restriction de f à $[2; +\infty[$, d'après le tableau de variation de f on a:

- g est continue sur $[2; +\infty[$ ✓
- g est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ ✓

Donc par le théorème de la bijection, g définit une bijection de $\mathcal{X} = [2; +\infty[$ dans $\mathcal{Y} = [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1; +\infty[$, de plus sa fonction réciproque h définit une bijection $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$ et est de même monotonie que g , soit croissante. ✓

Gai!
et continue

4. h est dérivable sur l'intervalle de dérivabilité de g tant que g' ne s'annule pas, on $g'(2) = 0$, Non ~~donc~~ h est dérivable sur $]2; +\infty[$.
 De plus le graphe de h admet une asymptote horizontale d'équation $x = 1$.
 Pourquoi? Revoir le théorème et sa rédaction.

5. On a $f(4) = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 + 5} = \sqrt{5}$ ainsi $h(\sqrt{5}) = 4$ car h est la réciproque de f sur $[2; +\infty[$ ✓
 De plus $f'(4) = \frac{4-2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ de plus, $h'(\sqrt{5}) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ donc $h'(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $h(\sqrt{5}) = 4$ et $f(4) = \sqrt{5}$ ✓

Parachutage

6. On a $\forall x \in [2; +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} = y$ CAP...
 $y \in \dots$
 $\Rightarrow y^2 = x^2 - 4x + 5$
 $\Rightarrow y^2 = (x-2)^2 + 1$
 $\Rightarrow (x-2)^2 = y^2 - 1$ ✓
 $\Rightarrow x-2 = \sqrt{y^2 - 1}$ car $x \geq 2$ et...
 $\Rightarrow x = \sqrt{y^2 - 1} + 2$ Insuffisant

Ainsi $\forall y \in [1; +\infty[$, $h(y) = 2 + \sqrt{y^2 - 1}$ ✓