

Exercice 01 (Bijection)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

On cherche $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ ✓

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 \geq 0$ ✓

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow$ Toujours vrai **Bien**

f est définie sur $\mathbb{R}$ ✓

Pas clair à cause de la racine carrée

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{(x-2)^2+1}} = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$ ✓

$\sqrt{(x-2)^2+1} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc c'est $x-2$ qui donne le signe de $f'(x)$. ✓

Donc $x-2 > 0$

$\Leftrightarrow x > 2$ ✓

Pourquoi ?

On peut lire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

et $f(2) = \sqrt{4-8+5} = 1$ ✓

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ✓

D'où :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	+
variation de f			

Diagramme de variation : une flèche descendante de $+\infty$ à 1, et une flèche ascendante de 1 à $+\infty$.

Bien

- 1) f est continue sur g ???
- f est strictement croissante sur g

Donc f est une bijection de $[2; +\infty[$ dans $f(g) = [1; +\infty[$

- 4) f est continue sur g
- f est strictement croissante sur g
- $\forall x \in [2; +\infty[\quad f'(x) \neq 0$ ✓

Par le théorème de la dérivée de la réciproque h est dérivable sur $[2; +\infty[$

et $\forall y \in [2; +\infty[\quad h'(y) = \frac{1}{f'(h(y))}$ **Bien**

Comportement de h en 1 ?

$$5) f(4) = \sqrt{16 - 16 + 5} = \sqrt{5} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow h(5) = 4$$

$$\forall y \in]2, +\infty[, h'(y) = \frac{1}{f'(h(y))} = \frac{1}{h(y)-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(h(y)-2)^2 + 1}} \quad \text{Gu} \quad \text{On} \quad f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{(h(y)-2)^2 + 1}}{h(y)-2} \quad \checkmark$$

plus facile

$$\text{Donc } h'(5) = \frac{\sqrt{(h(5)-2)^2 + 1}}{h(5)-2}$$

$$= \frac{\sqrt{(4-2)^2 + 1}}{4-2} \quad \checkmark$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \checkmark$$

$$6) \text{ On a } \forall x \geq 2 \quad \text{et } y \in \dots$$

$$y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(x-2)^2 + 1} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (x-2)^2 + 1 \quad \text{car } f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x-2) = \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{CAR} \dots$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y^2 - 1} + 2 \quad \checkmark$$

Conclusion:

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad h(y) = \sqrt{y^2 - 1} + 2$$

Bien