

Exercice ①

① Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

$$f(x) \text{ existe} \iff x^2 - 4x + 5 \geq 0 \quad \checkmark$$

Soit $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0 \quad \checkmark$ le discriminant du polynôme
d'où $f(x)$ existe $\iff x \in \mathbb{R} \quad \checkmark$ (car $\Delta < 0 \Rightarrow$ le polynôme prend
le signe de $a = 1$
 $\Rightarrow x^2 - 4x + 5 > 0$)

D'où $D_f = \mathbb{R} \quad \checkmark$

② On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée
de racine carrée d'un polynôme strictement positive. **OK!**

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \quad \checkmark$$

$$= \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \quad \checkmark$$

$$= \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \quad \checkmark$$

D'où $f'(x)$ prend le signe de $x - 2$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 4x + 5} > 0$)

Et On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \\ &= +\infty \quad \text{Bien} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \quad \text{Oui!} \\ &= +\infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

Et On a : $\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$

et $f(2) = \sqrt{4 - 8 + 5} = 1 \quad \checkmark$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

TTB

Variations

(d'après le tableau de signe.)

③ Soit $g: [2; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$ la restriction de f .
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

On a g est continue sur $[2; +\infty[$ (car f est dérivable sur $\mathbb{R}$)
 et g est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ (d'après le tableau de signe)
 Donc par le théorème de la bijection, la fonction g définit
 une bijection de $[2; +\infty[$ dans $g([2; +\infty[) = [g(2); \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n)]$
 Conclusion, $= [1; +\infty[$ **Gni**

g définit une bijection de $[2; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ ✓

De plus elle admet une réciproque h définie sur $[1; +\infty[$
 et h est ...

④ On a : g est dérivable sur $]2; +\infty[$ ✓
 et g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ ✓ et $\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) \neq 0$ ✓
 D'où par le théorème de la dérivabilité réciproque :

h est dérivable sur $]1; +\infty[$ **Gni**

De plus, $\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{h^2(x) - 4h(x) + 5}}$

On g est continue sur $[2; +\infty[$

Donc h est continue sur $[1; +\infty[$, plus précisément en 1.

D'où la courbe de h passera par le point $A(1; 2)$

OK cf corrigé

⑤ On a $f(h) = \sqrt{16 - 16 + 5} = \sqrt{5}$ ✓
 avec $4 \in [2; +\infty[$ et $\sqrt{5} \in [1; +\infty[$
 donc $h(\sqrt{5}) = 4$ ✓

On a $\sqrt{5} > 1$,

$$h'(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{h^2(\sqrt{5}) - 4h(\sqrt{5}) + 5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4^2 - 4 \times 4 + 5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}$$

⑥ Soit $(m, y) \in [2; +\infty[\times [1; +\infty[$ ✓

On résout l'équation $g(m) = y$:

$$g(m) = y \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 4m + 5} = y \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 5 = y^2 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 5 - y^2 = 0$$

avec $\Delta = 16 - 4(5 - y^2)$ ✓ le discriminant
 $= 16 - 20 + 4y^2$ ✓
 $= 4(y^2 - 1)$ ✓

or $y \in [1; +\infty[$

$$\Rightarrow y^2 \geq 1 \quad \Delta$$

$$\Rightarrow y^2 - 1 \geq 0$$

D'où $\Delta \geq 0$

alors $\alpha = \frac{4 - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2}$
 $= 2 - \sqrt{y^2 - 1}$

ou $\alpha = \frac{4 + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2}$ ✓
 $= 2 + \sqrt{y^2 - 1}$ ✓

or $\alpha \in [2; +\infty[$ et $2 - \sqrt{y^2 - 1} < 2$ ✓ (car $\sqrt{y^2 - 1} > 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{y^2 - 1} < 2$)

Donc $g(\alpha) = y \Leftrightarrow \alpha = 2 + \sqrt{y^2 - 1}$ ✓

D'où $\forall y \in [1; +\infty[$

$$h(y) = 2 + \sqrt{y^2 - 1}$$

Bien.