

Correction Automne 01

Bijection

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 5 \geq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 - 4X + 5$. On a

$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$. Conclusion,

la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$. Cependant pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a vu que $x^2 - 4x + 5 > 0$. Par conséquent la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Attention, la racine carrée posant un problème, il est insuffisant d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2 - 4x + 5} > 0$, on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2.$$

De même $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ et enfin $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$, et strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$.

De plus,

$$\begin{aligned} f(2) &= \sqrt{4 - 8 + 5} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} = +\infty. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et par la question précédente strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Par conséquent, la fonction g est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que

$$g \text{ est une bijection de } [2; +\infty[\text{ dans } \left[g(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= [1; +\infty[.$$

De plus, toujours d'après le théorème de la bijection, sa réciproque, notée h est aussi continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

4. On sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[2; +\infty[$. Donc la fonction g est dérivable sur $]2; +\infty[$ et

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad g'(x) = f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$

Nous avons déjà établi que $\forall x > 2$, $f'(x) \neq 0$ et que $f'(2) = 0$. Par conséquent, g est dérivable sur $]2; +\infty[$ et pour tout $x > 2$, $g'(x) \neq 0$. Ainsi,

- g est dérivable sur $]2; +\infty[$,
- g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$;
- $\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) \neq 0$.

D'après le théorème de la dérivabilité de la fonction réciproque, on en déduit que

$$h \text{ est dérivable sur } g(]2; +\infty[) =]1; +\infty[.$$

On sait même que pour tout $x > 2$, $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$.

Enfin, $f'(2) = 0$ i.e. le graphe de f admet une tangente horizontale en 2. Par symétrie par rapport à la droite $y = x$, on en déduit que

$$\text{le graphe de } h \text{ admet une tangente verticale en } 1.$$

5. Par définition de f ,

$$f(4) = \sqrt{4^2 - 4 \times 4 + 5} = \sqrt{5}.$$

Donc $g(4) = \sqrt{5}$ et par suite,

$$h(\sqrt{5}) = 4.$$

Enfin, par la question précédente et le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, pour tout $x > 2$,

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}.$$

Or pour tout $x > 2$,

$$g'(x) = f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{g(x)}.$$

Donc

$$h'(x) = \frac{g(h(x))}{h(x) - 2} = \frac{x}{h(x) - 2}.$$

Ainsi,

$$h'(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{h(\sqrt{5}) - 2} = \frac{\sqrt{5}}{4 - 2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Conclusion,

$$h'(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

6. Soit $(x, y) \in [2; +\infty[\times [1; +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = g(x) &\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \\ &\Leftrightarrow y^2 = x^2 - 4x + 5 && \text{car } y \geq 1 \geq 0 \text{ et } x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Considérons y comme un paramètre fixé et posons Δ le discriminant de $X^2 - 4X + 5 - y^2$. On a

$$\Delta = 16 - 4(5 - y^2) = 16 - 20 + 4y^2 = -4 + 4y^2 = 4(y^2 - 1).$$

Or $y \geq 1$ et donc $y^2 - 1 \geq 0$ i.e. $\Delta \geq 0$. Ainsi,

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4 - \sqrt{4(y^2 - 1)}}{2} = 2 - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{OU} \quad x = 2 + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Or $x \geq 2$. Si $y = 1$, alors $y = g(x)$ admet une unique solution double : $x = 2$ et si $y > 1$, alors $2 - \sqrt{y^2 - 1} < 2 \leq x$ et donc $y = g(x)$ admet pour unique solution $x = 2 + \sqrt{y^2 - 1}$. Dans tous les cas,

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in [1; +\infty[, \quad h(y) = 2 + \sqrt{y^2 - 1}.}$$