Exercice Automne 02
Trigo

- Exercice 1 :

1)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = \sin(2x+x)$

$$= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)$$

$$= \cos(x)\left(\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)\right) + \sin(x)\left(\cos^2 x - \sin^2(x)\right)$$

$$= 2\cos^2 x \cdot \sin x + \sin x\left(1 - \sin^2 x - \sin^2 x\right)$$

$$= 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right)$$

$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3 x}$$

2)

on a :

$$\cos(3x) - 3\sin(x) + 4\sin^3(x) \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) - \sin(3x) \geqslant 1 \quad ✓$$

on peut ecrire $\cos(3x) - \sin(3x)$ sur la forme

$R\cos(3x+\varphi)$ ✓ avec :

$R = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ✓

d'où $\cos(3x) - \sin(3x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x)\right)$ ✓

$\Rightarrow$ d'où $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Alors $\cos(3x) - \sin(3x) = \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ ✓

Donc

... $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$ ✓

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ✓

$\Rightarrow \cancel{\left(3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\right)}$

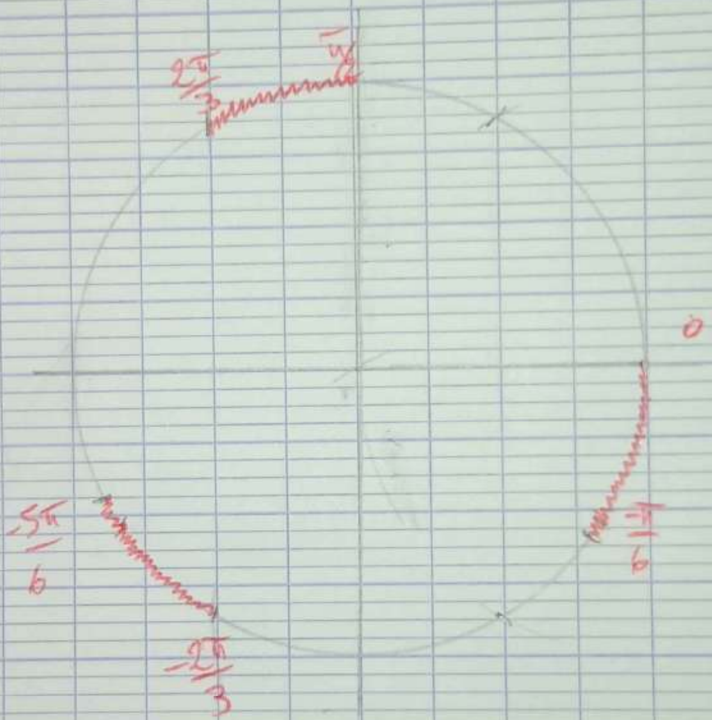
$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ mal écrit

$\Rightarrow 3x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Idem

$$\Rightarrow \boxed{x \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Conclusion ?

3) La représentation des solution entre $[-\pi ; \pi]$;



Bien