Exercice n°2

Q1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)$$ ✓

$$= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)[1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)]$$ ✓

$$= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$$ ✓

$$\boxed{= -4\sin^3(x) + 3\sin(x)}$$ ✓

Q2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(3x) - 3\sin(x) + 4\sin^3(x) \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) - \sin(3x) \geqslant 1$$ ✓

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x)\right) \geqslant 1$$ ✓

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)\right) \geqslant 1$$ ✓

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

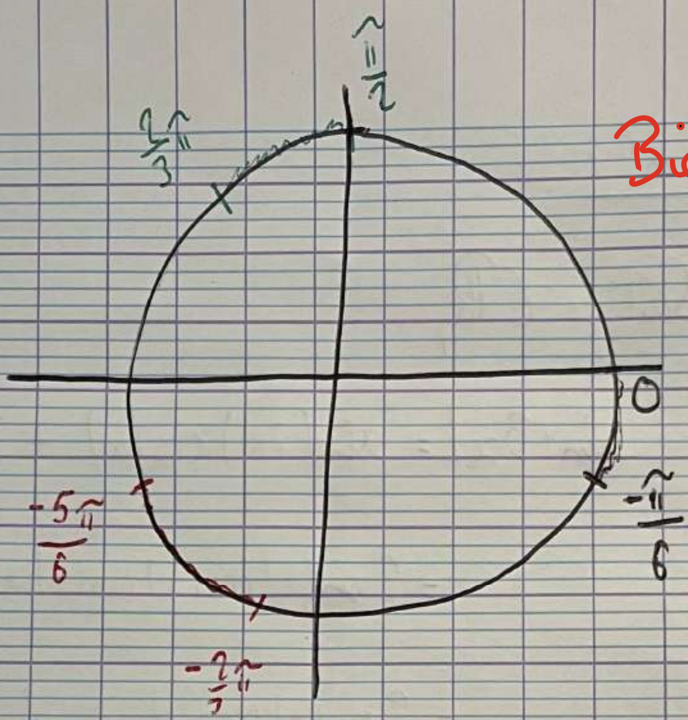
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{4} + 3x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$ ✓

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant 0 + 2k\pi$$ ✓

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \leqslant x \leqslant 0 + \frac{2}{3}k\pi$$ Bien

Conclusion ?

Q3)



Bien.

$k = 0 \; [-\frac{\pi}{6} ; 0]$

$k = \cancel{1} \; [\frac{\pi}{2} ; \frac{2}{3}\pi]$

$k = -1 \; [-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{2\pi}{3}]$

Les solutions entre $-\pi$ et π sont donc

$$\varphi = \cancel{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}} \left[-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6} ; 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{2}{3}\pi\right]$$

Oui