

Exercice Automne 2 (Trigonometrie)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \cos^2(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \end{aligned}$$

A encadrer

2. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(3x) - (3\cos(x) - 4\cos^3(x)) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) - \sin(3x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pourquoi?

impossible

$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}, \frac{5\pi}{4} + 2h\pi \leq 3x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} + 2h\pi$$

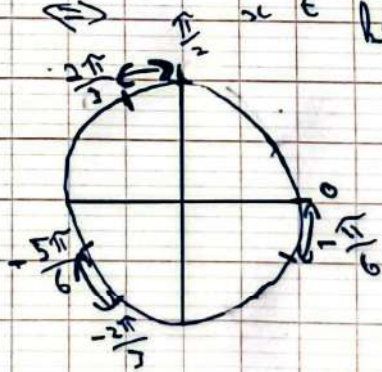
$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + \frac{2h\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{2h\pi}{3}$$

Donc:

$$\cos(3x) - 3\cos(x) + 4\cos^3(x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2h\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + \frac{2h\pi}{3} \right]$$

A encadrer



3. Les solutions entre $-\pi$ et π sont:

$$- h=0: \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$- h=-1: \left[-\frac{\pi}{6}; 0 \right]$$

$$- h=-2: \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3} \right]$$

Bien

$$\text{Donc, pour } x \text{ entre } -\pi \text{ et } \pi, \text{ les solutions sont: } x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; 0 \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

Bien