

Correction Automne 02

Trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) \\ &= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) \\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $(I) : \cos(3x) - 3\sin(x) + 4\sin^3(x) \geq 1$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}(I) &\Leftrightarrow \cos(3x) - 3\sin(x) + 4\sin^3(x) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(3x) - (3\sin(x) - 4\sin^3(x)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(3x) - \sin(3x) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(3x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 3x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x \leq 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathcal{S}_I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{2k\pi}{3} \right].}$$

3. En particulier l'ensemble des solutions entre $-\pi$ et π est donné par :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[-\pi; \pi]} = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; 0 \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right].}$$

