

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit
$$I_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Faisons $\tilde{k} = n - k$ ✓ donc $k = n - \tilde{k}$ ✓

De plus pour $k=0$ on a $\tilde{k} = n$ ✓

et pour $k=n$ on a $\tilde{k} = 0$ ✓

On obtient :
$$I_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left((n - \tilde{k}) \frac{\pi}{2n}\right) \quad \text{Qui}$$

$$= \sum_{\tilde{k}=0}^n \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\tilde{k}\pi}{2n}\right) \quad \checkmark$$

$$= \sum_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad \text{car la variable est muetée} \quad \checkmark$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(1 - \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \quad \checkmark$$

$$I_n = n+1 - I_n \quad \times$$

En posant $X = I_n$ on a :

$$X = n+1 - X \quad \times \quad (\Rightarrow) \quad X^2 + X - (n+1) = 0 \quad \text{La fin est plus simple}$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 + X - (n+1)$

$$\Delta = 1 + 4(n+1) > 0 \quad \text{car } n \geq 0$$

Il y a deux solutions :

$$S_n = \frac{-1 \pm \sqrt{4n+5}}{2}$$

Vérifie ton résultat
pour $n=1$ ou 2
par exemple

2) Linéarisation: On a les égalités suivantes:

$$I_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1}{2} \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 1 \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left(\operatorname{Re} \left(e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) \right) \right) + \frac{n+1}{2} \quad \text{plus simple}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \left(e^{i \frac{\pi}{n}} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left(e^{-i \frac{\pi}{n}} \right)^k \right) + \frac{n+1}{2}$$

On recommande ...

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \left(e^{i \frac{\pi}{n}} \right)^{n+1}}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \left(e^{-i \frac{\pi}{n}} \right)^{n+1}}{1 - e^{-i \frac{\pi}{n}}} \right) + \frac{n+1}{2} \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i \left(\pi + \frac{\pi}{n} \right)}}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} + \frac{1 - e^{-i \left(\pi + \frac{\pi}{n} \right)}}{1 - e^{-i \frac{\pi}{n}}} \right) + \frac{n+1}{2}$$

Factorise par l'angle moitié.