

Exercice 03 : utilisation d'induction

Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_m = \sum_{k=0}^m \cos^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$

- 1) On pose $\tilde{k} = m - k$, puis prouver la l'assertion d'induction quand $k = m$, $\tilde{k} = 0$ et quand $k = 0$, $\tilde{k} = m$

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=0}^m \cos^2\left(\frac{(m-k)\pi}{2m}\right) \\ &= \sum_{k=0}^m \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2m}\right) \text{ car l'indice est inversé} \\ &= \sum_{k=0}^m \sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right) \end{aligned}$$

Or 2 $S_m = \sum_{k=0}^m \left[\cos^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right) \right] = \sum_{k=0}^m 1 = m+1$

Ainsi $S_m = \frac{m+1}{2}$ **Bien**

- 2) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cos^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right) = 1 + \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)}{2}$$

Ainsi $S_m = \sum_{k=0}^m \frac{1 + \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)}{2} = \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)$

or la somme $\sum_{k=0}^m \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)$ vaut 0 les termes se regroupent par paires k et $k-m$

Que si n est impaire alors...

$$\cos\left(\frac{(m+k)\pi}{2m}\right) = \cos\left(\pi + \frac{k\pi}{2m}\right) = -\cos\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$$

et $\cos(0) + \cos(\pi) = 1 - 1 = 0$ donc la somme vaut 0 et on retrouve

pas d'air

$$S_m = \frac{m+1}{2}$$