Correction Automne 03
Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. Posons $\tilde{k} = n - k$. Alors,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= n + 1 - S_n. \end{aligned}$$

   Ainsi, $2S_n = n+1$. Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}.}$$

2. Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a

$$\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) && \textit{par la } \mathbb{R}\textit{-linéarité de la partie réelle} \end{aligned}$$

   On reconnaît alors une somme géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1$ car $n \geqslant 1$ et donc $\frac{\pi}{n} \in]0; 2\pi[$. Par suite,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n+1}{2} + \mathrm{Re}\left(1 \times \frac{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi(n+1)}{n}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}}\right)\\
&= \frac{n+1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)\pi}{2n}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{(n+1)\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{i\frac{(n+1)\pi}{2n}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}}\right) && \textit{par factorisation par l'angle moitié}\\
&= \frac{n+1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{2n}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)\\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\underbrace{\mathrm{Re}\left(i\right)}_{=0}\\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}.}$$