

Exercice 6: Fonctions usuelles

1. On pose $f: x \mapsto \arccos(2x^2 - 1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Preuve donc $\Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{1} = 1 \quad \text{Faux} \quad \text{et } |x| \leq 1$$

Conclusion: $\text{Df} = [-1; 1]$???

On sait que $\arccos(X) = \frac{1}{2} \cdot X$ avec $X = 2x^2 - 1$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$
f est dérivable si et seulement si $2x^2 - 1 \in]-1, 1[\checkmark$

$$\Leftrightarrow -1 < 2x^2 - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2x^2 < 2 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{1} = 1 \quad \text{ou} \quad -1 < x < 0$$

~~et $|x| < 1$~~

Conclusion: $D_f =]-1, 0[\cup]0, 1[$ OK!

3. Df est centrée en 0^v et continue ^{??} Hors sujet
ici $D_f = [-1, 1]$

a plus ~~faux~~...
 $f(-x) = \arccos(2(-x)^2 - 1)$

$$= \arccos(2x^2 - 1) = f(x) \checkmark$$

Conclusion: $f(-x) = f(x)$ donc f est paire ^{Gri}

4. on peut donc se restreindre à l'étude de f sur $[0, 1] \checkmark$

on rappelle $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$

si on pose $\overset{\text{donc}}{X} = \dots$
 $x = \cos(X) \checkmark$ on a alors $f(x) = \arccos(2\cos^2(X) - 1)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \arccos(\cos(2X)) \Leftrightarrow f(x) = 2X$$

Faux si $x \notin [0, \pi] \triangle!$

restriction

La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, et

$$a \in [-1, 1], \text{ donc } X \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{Parquei?}$$

$$\text{on a donc } X = \arccos(a)$$

Bien revoir
le raisonnement

$$2X = 2 \arccos(a)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } f(a) \text{ se simplifie en } 2 \arccos(a)} \quad (\text{sur } [0, 1])$$

Qui est π ? QUE si $-x \in [0, 1]$

5. on utilise la propriété : $f(a) = f(-a) \Leftrightarrow 2 \arccos(-a)$

on donne une formule dans l'énoncé qui donne
 $\Leftrightarrow$

$$\frac{2 \arccos(u) + 2 \arccos(-u)}{2} = \arccos(u) + \arccos(-u)$$

$$= \pi \quad \text{car}$$

$$\text{donc } \arccos(-u) = \pi - \arccos(u) \quad \checkmark$$

$$\text{en remplaçant } u \text{ par } a, \text{ on a } f(a) = 2 \arccos(-a) =$$

$$2(\pi - \arccos(a))$$

~~xxx...~~

$$\Leftrightarrow f(a) = 2\pi - 2 \arccos(a)$$