

Exercice Automne 04

Fonction usuelles :

Exercice 18

Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x^2 - 1)$

1. Le domaine de définition de f .
On sait que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Qu'est-ce que x ?

$$\begin{aligned} \text{Donc } -1 &\leq \cos(2x^2 - 1) \leq 1 \\ \text{car } 2x^2 - 1 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &\leq 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1 \text{ et } x \geq -1 \end{aligned}$$

Je ne comprends pas

$$\text{Ainsi } D_f = [-1, 1]$$

2. Le domaine de dérivabilité de f .
car f est définie sur $[-1, 1]$
et f dérivable sur $] -1, 1 [$

Non pas clair

$$\text{car } -1 \leq 2x^2 - 1 < 1$$

Non

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } 2x^2 - 1 > -1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

donc le domaine de dérivabilité est

$$]-1, 0[\cup]0, 1[$$

pas clair

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } 2x^2 - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \text{ et } x > -1$$

$$\forall x \in]-1, 0] \cup]0, 1[: f(x) = (\arccos(2x^2 - 1))'$$

$$f'(x) = - \frac{(2x^2 - 1)'}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} \quad \text{ain}$$

$$= - \frac{4x}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} \quad \checkmark$$

A poursuivre

3). La parité de f $[1; 1]$ est centrée en 0 !!

$$\begin{aligned} \text{ona } f(-x) &= \arccos(2(-x)^2 - 1) \quad \checkmark \\ &= \arccos(2x^2 - 1) \quad \checkmark \\ &= f(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Donc f est paire. $\checkmark$

4. Simplification de f sur $[0, 1]$

Suit

on pose $x = \cos(t)$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Non car ici x est alors particulier.
Il faut définir x quelconque en premier.

donc

$$f(x) = \arccos(2\cos^2 t - 1) \quad \checkmark$$

on sait que $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ $\checkmark$

on remplace dans l'équation de $f(x)$

$$\text{alors } f(x) = \arccos(\cos(2t)) \quad \checkmark$$

$$\boxed{f(x) = 2 \arccos(x)} \quad \text{Pas clair}$$

5.

$$\forall u \in [-1, 1] \quad \arccos(-u) = \pi - \arccos(u) \quad \checkmark$$

$$\text{donc } \frac{\arccos(-u) + \arccos(u)}{2} = \frac{\pi - \arccos(u) + \arccos(u)}{2} \\ = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$$

et on a f est paire

$$\text{donc } f(x) = f(-x) = \arccos(x) \quad \text{(QUE SI: } x \in [0, 1])$$