Correction Automne 04
Fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f(x) \text{ existe} & \Leftrightarrow & -1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ & \Leftrightarrow & -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D} = [-1;1]\,.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ est dérivable en } x & \Leftrightarrow & -1 < 2x^2 - 1 < 1 \\ & \Leftrightarrow & 0 < 2x^2 < 2 \\ & \Leftrightarrow & 0 < x^2 < 1 \\ & \Leftrightarrow & -1 < x < 0 \quad \text{OU} \quad 0 < x < 1. \end{array}$$

Conclusion, le domaine de dérivabilité de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}' = \,]-1;0[\,\cup\,]0;1[\,.}$$

3. On commence par observer que $\mathscr{D}$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$. De plus,

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(-x) = \arccos\left(2(-x)^2 - 1\right) = \arccos\left(2x^2 - 1\right) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

4. Soit $x \in \,]0;1[$. La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^2 - 1\right)' \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (2x^2-1)^2}} \\ &= 4x \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (4x^4 - 4x^2 + 1)}} \\ &= -\frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^4 + 4x^2 - 1}} \\ &= -\frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} \\ &= -\frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{CAR } x > 0 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

On observe alors

$$\forall x \in \,]0;1[\,, \qquad f'(x) = 2\arccos'(x).$$

Dès lors,
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]0;1\right[, \qquad f(x) = 2\arccos(x) + C$$
En évaluant en $\sqrt{2}/2$, on a
$$\arccos\left(2\times\frac{1}{2}-1\right) = 2\frac{\pi}{4} + C \ \Leftrightarrow\ \arccos(0) = \frac{\pi}{2}+C \ \Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+C \ \Leftrightarrow\ C = 0.$$
Ainsi,
$$\forall x \in \left]0;1\right[, \qquad f(x) = 2\arccos(x).$$
On pouvait aussi utiliser la continuité en 0 ou en 1 ou l'évaluation en $x = 1/2$ ou $x = \sqrt{3}/2$. Cela permet notamment de vérifier son résultat en testant une autre valeur.

De plus, en 0, on a
$$f(0) = \arccos(-1) = \pi \text{ et } 2\arccos(0) = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi.$$
De même en 1,
$$f(1) = \arccos(2-1) = \arccos(1) = 0 \text{ et } 2\arccos(1) = 0.$$
Donc la formule reste vraie en 0 et en 1 :
$$\boxed{\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = 2\arccos(x).}$$

5. Par parité, pour tout $x \in [-1;0]$, en posant $y = -x \in [0;1]$,
$$f(x) = f(-y) = f(y) = 2\arccos(y) = 2\arccos(-x).$$
La fonction arccos admet le point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour centre de symétrie :
$$\forall u \in [-1;1], \qquad \frac{\arccos(-u)+\arccos(u)}{2} = \frac{\pi}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \arccos(-u) = \pi - \arccos(u).$$
Ainsi,
$$\forall x \in [-1;0], \qquad f(x) = 2\pi - 2\arccos(x).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in [-1;0], \qquad f(x) = 2\pi - 2\arccos(x).}$$