

## Exercice autonome 05 complexes

### Exercice 1:

1. Soit  $f: z \mapsto \frac{z}{z-i}$ . Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $\mathcal{D}_f$  le domaine

de définition de  $f$ . On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow f(z) \text{ existe} \quad \checkmark \\ &\Leftrightarrow z-i \neq 0 \quad \checkmark \\ &\Leftrightarrow z \neq i \quad \checkmark \end{aligned}$$

ainsi le domaine de définition de  $f$  est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{i\} \quad \checkmark$$

2. Si  $z = 1$ , alors on a

$$f(1) = \frac{1}{1-i} \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{1+i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} \quad \checkmark$$

De plus

$$|f(1)| = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \checkmark = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ainsi,

$$f(1) = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} \quad \checkmark$$

3. Soit  $z \in \mathbb{C}^p$ . On a les équivalences suivantes:

$$p(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p(z) = \overline{p(z)} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{z-i} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}+i} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow z(\bar{z}+i) = \bar{z}(z-i) \quad \text{car } z \neq i \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + zi = z\bar{z} - \bar{z}i \quad \text{avec } z\bar{z} = |z|^2 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow i(z + \bar{z}) = 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow 2i \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\} \quad \text{Oui!}$$

Conclusion,  $p(z) \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$

Ainsi:

$$p^{-1}(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{i\} \quad \text{TB}$$