Correction Automne 05
Complexes

Solution de l'exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$f(z) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad z - i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq i.$$
Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{C} \setminus \{i\}.}$$

2. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1-i} \\ &= \frac{1+i}{1^2+1^2} \\ &= \frac{1+i}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$
Conclusion, la forme algébrique de $f(1)$ est
$$\boxed{f(1) = \frac{1+i}{2}.}$$
Sa forme polaire est
$$\boxed{f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

3. *Méthode 1.* Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \{z' \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid f(z') \in \mathbb{R}\} \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad f(z) = \overline{f(z)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z}{z-i} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}+i} \\ &\Leftrightarrow \quad z(\overline{z}+i) = \overline{z}(z-i) \qquad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2 + iz = |z|^2 - i\overline{z} \\ &\Leftrightarrow \quad z = -\overline{z} \\ &\Leftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$
Rappelons que $z \neq i$. Conclusion,
$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{i\}.}$$
Méthode 2. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $O(0)$, $A(i)$ et $M(z)$ trois points du plan complexes. On a les équivalences

suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z}{z-i} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-0}{z-i}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad O,\ A,\ M \text{ alignés} \\ &\Leftrightarrow \quad M \in (OA) = (Oy)\,. \end{aligned}$$

Rappelons que $z \neq i$ donc $M \neq A$. Donc l'ensemble des points du plan du plan complexe dont l'affixe est solution est $(Oy) \setminus \{A(i)\}$ Ainsi,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{i\}\,.}$$