

Exercice Automne 06

Calcul algébrique

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j$.

1. En choisissant soigneusement l'ordre de sommation, montrer que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Montrer également que l'on a $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1) 2^j$.
3. En déduire que $\sum_{j=1}^n j 2^{j-1} = (n-1) 2^n + 1$.