

Exercice 06) Calcul algébrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j$

1) On a,

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^j = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n 2^j \right) \quad \text{Giv}$$

$$\sum_{j=i}^n 2^j = 2^i \times \frac{1 - 2^{n-i+1}}{1 - 2}$$

car on reconnaît...

$$\stackrel{!}{=} -2^i (1 - 2^{n-i+1})$$

$$= -(2^i - 2^i (2^{n-i+1}))$$

$$= -(2^i - 2^{n+1})$$

$$S_n = \sum_{i=0}^n (2^i - 2^{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^n 2^i - \sum_{i=0}^n 2^{n+1} \quad \checkmark$$

$$= (2^{n+1} - 1) - 2^{n+1}(n+1) \quad \checkmark$$

Bigame mon ?

$$\begin{aligned} &= (n+1) 2^{n+1} - (2^{n+1} + 1) \\ &= n 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

incohérent

Donc, $S_n = n2^{n+1} + 1$

2) On a, $S_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j 2^i$ ✓

$$S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j \quad \checkmark$$

donc, $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$ ✓ A encadrer

3) D'après la question 2, on a,

$$S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j = \sum_{j=0}^n j2^j + \sum_{j=0}^n 2^j \quad \checkmark$$

On, $\sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1$ ✓

On sait que $S_n = n2^{n+1} + 1$ d'après la question 1, donc,

$$S_n = n2^{n+1} + 1 = \sum_{j=0}^n j2^j + (2^{n+1} - 1)$$

Guri

Alors,

$$\sum_{j=0}^n j2^j = n2^{n+1} + 1 - \textcircled{2^{n+1} + 1}$$

Non!

$$\sum_{j=0}^n j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad \text{oui!}$$

- d'où,

$$\sum_{j=0}^n j 2^{j-1} = \frac{1}{2} (n-1) 2^{n+1} + \frac{1}{2} \times 2 \quad \checkmark$$

$$= (n 2^{n+1} - 2^{n+1}) \times \frac{1}{2} + 1 \quad \checkmark$$

$$\sum_{j=0}^n j 2^{j-1} \stackrel{\text{direct}}{=} (n-1) 2^n + 1 \quad \text{Bien}$$

Cf corrigé pour une méthode par changement de variable.