

1) Soit $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_m = \sum_{0 \leq i \leq j \leq m} 2^j$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^m 2^j \quad \text{Gui}$$

$$= \sum_{i=0}^m 2^i (2^{m-i+1} - 1) \quad \text{car on reconnaît...}$$

$$= \sum_{i=0}^m (2^{m+1} - 2^i) \quad \checkmark$$

$$= (m+1)2^{m+1} - (2^{m+1} - 1) \quad \checkmark$$

$$= m2^{m+1} + 1 \quad \text{Bien, à encadrer}$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_m = \sum_{0 \leq i \leq j \leq m} 2^j$$

$$= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^j 2^j \quad \checkmark$$

$$= \sum_{j=0}^m 2^j \sum_{i=0}^j 1 \quad \checkmark$$

$$= \sum_{j=0}^m 2^j (j+1) \quad \checkmark$$

$$= \sum_{j=0}^m (j+1) 2^j \quad \text{Gui à encadrer}$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{j=0}^m (j+1)2^j \\ &= \sum_{j=0}^m j2^j + \sum_{j=0}^m 2^j \quad \checkmark \end{aligned}$$

On : $\sum_{j=0}^m 2^j = 2^{m+1} - 1 \quad \checkmark$ et $\sum_{j=0}^m (j+1)2^j = S_m = m2^{m+1} + 1$ d'après...

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m j2^j &= \sum_{j=0}^m (j+1)2^j - \sum_{j=0}^m 2^j \quad \checkmark \\ &= m2^{m+1} + 1 - (2^{m+1} - 1) \quad \checkmark \\ &= (m-1)2^{m+1} + 2 \quad \text{Bien} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m j2^{j-1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m j2^j \quad \checkmark = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m j2^j \quad \text{Car...} \\ &= \frac{1}{2} ((m-1)2^{m+1} + 2) \\ &= (m-1)2^m + 1 \quad \text{Bien.} \end{aligned}$$

Cf corrigé pour une autre méthode par glissement d'indice.