Correction Automne 06
Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. En sommant en interne sur j et en externe sur i, on a

$$S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^j$$

On reconnaît dans la somme interne une somme géométrique de raison $2 \neq 1$ et de premier terme 2^i :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \left(2^{n-i+1} - 1\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^{n+1} - 2^i = 2^{n+1} \sum_{i=0}^{n} 1 - \sum_{i=0}^{n} 2^i.$$

A nouveau, la seconde somme est une somme géométrique de raison $2 \neq 1$ et de premier terme 1. Par conséquent,

$$S_n = (n+1)\,2^{n+1} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (n+1)\,2^{n+1} + 1 - 2^{n+1} = n2^{n+1} + 1.$$

Conclusion, on obtient bien,

$$\boxed{S_n = n2^{n+1} + 1.}$$

2. En sommant en interne sur i et en externe sur j, on trouve cette fois-ci :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \underbrace{2^j}_{\text{indépendant de } i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j \sum_{i=0}^{j} 1 = \sum_{j=0}^{n} 2^j\,(j+1)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)\,2^j.}$$

3. Par les deux questions précédentes, on a :

$$n2^{n+1} + 1 = S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)\,2^j.$$

Par le glissement d'indice $\tilde{j} = j+1$, on obtient que

$$n2^{n+1} + 1 = \sum_{\tilde{j}=1}^{n+1} \tilde{j}2^{\tilde{j}-1} = \sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} + (n+1)\,2^n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} &= n2^{n+1} + 1 - (n+1)\,2^n \\ &= 2n2^n + 1 - (n+1)\,2^n \\ &= (n-1)\,2^n + 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} = (n-1)\,2^n + 1.}$$