

Exercice Revisions Automne 07
Bryellu

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $f: x \rightarrow x^2 + 1 - \frac{2}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ bien } &\Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{2}{x} \text{ est défini} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x} \text{ est défini} \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \end{aligned}$$

$\frac{2}{x}$ impose que $x \neq 0$ les autres termes étant définis

sur $\mathbb{R}$ par conséquent :

on note D_f un domaine de définition de f

$$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Eni

la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme de fonctions qui

le sont sur $\mathbb{R}^*$ ✓

$\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = x^2 + 1 - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} \quad \checkmark$$

$$= \frac{2x^3 + 2}{x^2} \quad \checkmark$$

$$x^2 > 0 \quad \forall x \in D_f$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^3 + 2$ ✓

on a donc : $2x^3 + 2 > 0$ ✓

$\Leftrightarrow 2x^3 > -2$ ✓

$\Leftrightarrow x^3 > \frac{-2}{2}$

$\Leftrightarrow x^3 > -1$ ✓

$\Leftrightarrow x > -1$ *6mi*

calculons les limites :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ ✓

$x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow x} 1 = 1$

$x \rightarrow x$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x} = 0^+$ ✓

$x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

$x \rightarrow 0$

$x < 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

$x \rightarrow 0$

$x < 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ✓

$x \rightarrow 0$

$x < 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2}{x} = +\infty$

$x \rightarrow 0$

$x < 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \checkmark$$

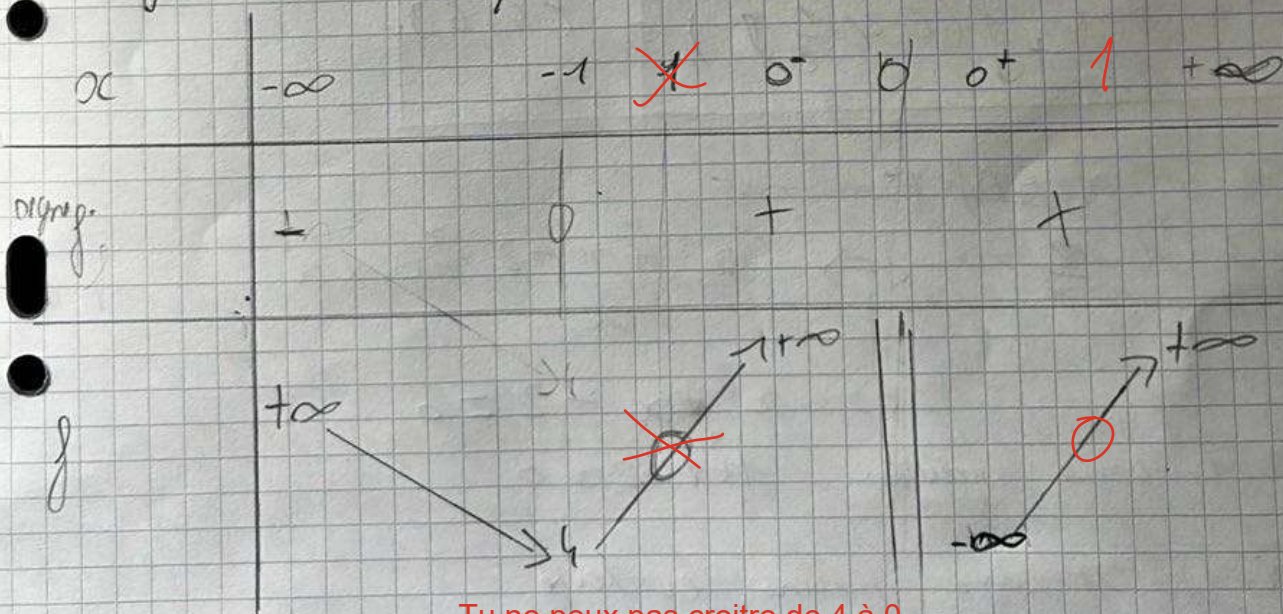
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\text{et } f(-1) = 1^2 + 1 - \frac{2}{-1} = 2 + 2 = 4 \quad \checkmark$$



3) la fonction f est continue sur $[-2; -\frac{1}{2}]$ ✓
 d'après le tableau de variation f est strictement décroissante
 sur $[-2; -1]$ ✓ et est strictement croissante sur $[-1; -\frac{1}{2}]$ ✓ $\Rightarrow$ pas monotone sur $[-2; -\frac{1}{2}]$
 on a donc $f(-2) = (-2)^2 + 1 - \frac{2}{-2} = 6$ ✓

$$f(-1) = 4 \quad \checkmark$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{21}{4} = 5.25 \quad \checkmark$$

Le minimum est donc 4 et le maximum 6.

(on a comme min = 4
 et max = 6)

on a donc $f([-2; -\frac{1}{2}]) = [4; 6]$ Bien

4) $f(x) = 0 \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{x^3 + 0x - 2x^2}{x} = 0 \quad \times x$$

$$(\Rightarrow) \quad x^3 + x - 2 = 0 \quad \text{car } x \neq 0$$

on $x=1$ comme solution $1^3 + 1 - 2 = 0$

($x=1$) est une racine évidente

on a

$x^3 + x - 2$	$x - 1$
$- \underline{x^3 + x^2}$	$x^2 + x + 2$
$0 + x^2 + x - 2$	
$- \underline{x^2 - x}$	
$0 + 2x - 2$	
$- \underline{2x - 2}$	
$0 \quad 0$	

on a donc $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$ Bien

$$(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$x-1=0$ ou $x^2 + x + 2 = 0$

$\Rightarrow x=1$ ou $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$

$\Delta < 0$ n'admet pas de solution

Conclusion $f(x)=0$ admet une unique solution Bien.

$x=1 \in Df$

(5) on cherche les $x \in Df$, $f(x) \geq 0$

sur $] -\infty, 0[$

d'après le tableau de variation, f est continue, tend vers $+\infty$ au bord avec un minimum en $x=-1$

$f(-1)=4 > 0$ Donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) > 0$ Bien

sur $]0, +\infty[$

f est strictement croissante $f(0^+) = -\infty$, $f(1) = 0$, et

lim $f(x) = +\infty$ ✓ Donc $f(x) \geq 0$: $x \geq 1$ ✓

Ainsi on $f^{-1}(\mathbb{R}_+) =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ +2

6)

$\forall x \in D_f$

$$f(x) = 4 :$$

$$x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 3 - \frac{2}{x} = 0 \quad \checkmark$$

on a

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

on on voit déjà que pour

$$x = -1 \quad f(x) = 4 \quad \checkmark$$

donc $(x+1)$ est une
racine évidente

$x^3 - 3x - 2$	$(x+1)$
$- x^3 + x^2$	$x^2 - x - 2$
$-x^2 - 3x - 2$	
$- (-x^2 - x)$	
$-2x - 2$	
$- (-2x - 2)$	
0	

on a donc $x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$

donc plus $(x+1)(x^2 - x - 2) = 0$

$$(x+1) = 0$$

$$\text{ou } x^2 - x - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \checkmark$$

$f(x) = 4$ admet 2 solutions $x = -1, x = 2 \in D_f$ fin

7) sur $(0, +\infty[$ f est strictement croissante $\Rightarrow$ l'injective

on sur $] -\infty, 0[$, f n'est pas monotone $\Rightarrow$ non injective (n'admet pas un plus un antécédent)

Donc f n'est pas injective sur D_f

Pas très clair

8) sur $]0, +\infty[$ f est continue, strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

donc $f([0, +\infty[) = \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ f admet un
moins un antécédent dans D_f

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective

Bien