

Ahmed  
Moustafa

## Exercice Automne 07

### Bijectivité

#### Exercice 11:

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

Sat  $x \in \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3 + 1 - \frac{2}{x}$

1)  $f$  existe  $\Leftrightarrow x \neq 0$

donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  OK

2)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f'(x) = \left(x^3 + 1 - \frac{2}{x}\right)'$   
 $= 3x^2 + \frac{2}{x^2}$  ✓  
 $= \frac{2(x^3 + 1)}{x^2}$  ✓

$x^2 > 0$  donc le signe de  $f'$  est celui de  $x^3 + 1$  ✓

•  $x^3 + 1 < 0$  pour  $x < -1$  ✓

•  $x^3 + 1 = 0$  pour  $x = -1$

•  $x^3 + 1 > 0$  pour  $x > -1$  ✓

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -1]$

$f$  est strictement croissante sur  $]-1; 0[$  et  $]0; +\infty[$  ✓

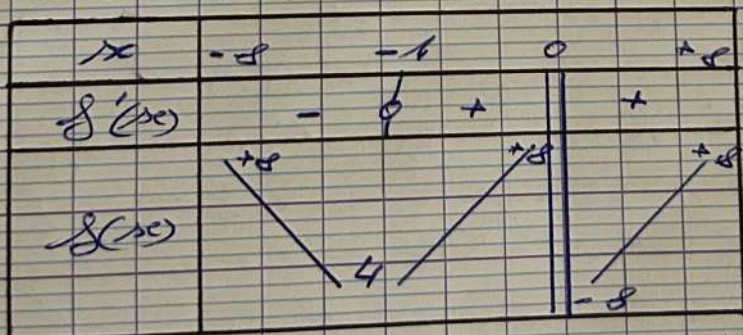
•  $f(-1) = 4$  ✓

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  ✓

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ✓

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ✓



Bien

3)  $f\left(\left[-2; -\frac{1}{2}\right]\right); f(-2) = 6$  ✓  
 et  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} = 2,75$  ~~5,3~~ Faux

et  $f$  sur  $[-1; 1]$  admet une valeur minimale

(donc)  $f(-1) = 4$  ✓

donc  $f\left(\left[-2; -\frac{1}{2}\right]\right) = [4, 6]$  6 mi

4)  $g(x) = 0 \quad (x \in Dg)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 0$  ✓

$\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x+1) = 2$

donc  $x = 1$

car...

Bf

?

Est-ce la seule solution ?

5)  $g^{-1}(R_+) = \{x \in Dg \mid g(x) \geq 0\}$

car  $g(0) = 0$  ✓

et  $g(x) < 0$  si  $x \in ]0, 1[$  ✓ et  $x > 0$

$g(x) > 0$  si  $x < 0$  ✓

$g^{-1}(R_+) = ]-\infty, 0] \cup \{1, +\infty[$  OK

6)  $g(x) = 4 \quad (x \in Dg)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 4$  ✓

$\Leftrightarrow x^3 - 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$  ou  $x + 1 = 0$  ✓

$\Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = -1$  ✓

donc  $g(x) = 4 \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = -1$  ✓

7) non  $g$  n'est pas injective sur  $Dg$

car on a  $g(-1) = g(2) = 4$  et  $-1 \neq 2$

8) oui  $g$  est surjective sur  $Dg$

car par exemple sur  $]0, +\infty[$ :

$g$  est strictement croissante et prend toutes les valeurs réelles

oui

A encadrer.