

Correction Automne 07

Bijection

Solution de l'exercice 1

1. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Conclusion,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*.$$

2. La fonction f est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ comme différence de fonctions définies et dérivables sur leurs ensembles de définition et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

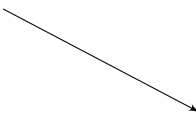
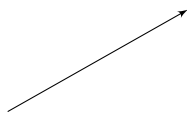
$$f'(x) = 2x - \frac{-1}{x^2} = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2}.$$

$$\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2}.$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow \frac{2(x^3 + 1)}{x^2} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x^3 + 1 \geq 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x^3 \geq -1 \\ & \Leftrightarrow x \geq -1 \quad \text{car la fonction cube est bijective sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
f				

Complétons le tableau. D'une part, $f(-1) = (-1)^2 + 1 - \frac{2}{-1} = 4$. D'autre part, quand $x \rightarrow -\infty$, on a $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

De même, quand $x \rightarrow +\infty$, on a $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ et $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Enfin, quand $x \rightarrow 0^-$, on a $-\frac{2}{x} \rightarrow +\infty$ et $x^2 + 1 \rightarrow 1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

De même, quand $x \rightarrow 0^+$, on a $-\frac{2}{x} \rightarrow -\infty$ et $x^2 + 1 \rightarrow 1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
f	$+\infty$	4	$+\infty$	$+\infty$

3. Calculons,

$$f(-2) = 4 + 1 - \frac{2}{-2} = 5 + 1 = 6 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4} + 4 = \frac{21}{4}.$$

Donc par la question précédente, on observe que

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0
f	$+\infty$	6	4	$\frac{21}{4}$	$+\infty$

Conclusion,

$$f\left(\left[-2; -\frac{1}{2}\right]\right) = [4; 6].$$

4. Soit $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x - 2 = 0 \quad \text{car } x \neq 0.$$

On observe que 1 est une racine évidente : $1^3 + 1 - 2 = 0$ Donc

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2).$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 + X + 2$, $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$. Donc $x^2 + x + 2 \neq 0$. Ainsi,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Conclusion, pour $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

5. Par les questions précédentes, on a

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$	4	$+\infty$	0	$+\infty$

Par conséquent,

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[.$$

6. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 4 & \Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{2}{x} = 4 \\ & \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 4x && \text{car } x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0. \end{aligned}$$

On observe que -1 est une racine évidente. Donc

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2).$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 - X - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9$. Donc les racines associées sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Ainsi

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

D'où,

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ OU } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ OU } x = 2.$$

Conclusion, pour $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ OU } x = 2.$$

7. Par la question précédente, 4 possède deux antécédents, -1 et 2 . Conclusion,

$$\text{la fonction } f \text{ n'est pas injective sur } \mathcal{D}_f.$$

8. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc par le théorème de la bijection, f restreinte à $]0; +\infty[$ définit une bijection de $]0; +\infty[$ dans $f(]0; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$.

Notamment tous réel $y \in \mathbb{R}$ admet par f un antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ et donc notamment dans $\mathcal{D}_f$.

Conclusion,

$$\text{la fonction } f \text{ est surjective dans } \mathbb{R}.$$