

Exercice Automne 8

On a, $\arcsin(\sqrt{2x}) = 2\arcsin(x)$.

Étude domaine de définition :

On a, $\sqrt{2x}$ existe $\Leftrightarrow x \geq 0$ ✓
et, $\sqrt{2x} \in [-1; 1]$, on doit avoir $0 \leq 2x \leq 1$, donc.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{oui}$$

Forme trigonométrique :

Soit $x \in \dots$

On pose

$$\arcsin(x) = \theta \quad \checkmark$$

$$\text{donc } x = \sin(\theta) \quad \checkmark \text{ avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{oui}$$

On donc : $\arcsin(\sqrt{2\sin(\theta)}) = 2\theta \quad \checkmark$

Et comme $x \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq 0 \quad \checkmark$, on $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

(car $x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \leq \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$) $\checkmark$!

Très bien !

On sait donc que $\arcsin$ est croissante et $\sin$ est bijective on peut alors appliquer $\sin$ des deux côtés :

$$\sqrt{2\sin(\theta)} = \sin(2\theta) = 2\sin(\theta) \times \cos(\theta) \quad \checkmark$$

Transformation :

On met l'équation au carré :

$$2\sin(\theta) = 4\sin^2(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) \quad \checkmark$$

On pose $\sin(\theta) = x$

$$2x = 4x^2(1 - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Trop rapide...

$$x(4x(1-x^2)-2) = 0$$

Etrange ce retour en arrière...

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{2x^3 - 2x + 1}_{f(x)} = 0.$$

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$$

parachutage
↓ erroné
f est décroissante ici
et n'a pas de racine.

$$\text{Alors } \boxed{x = 0}.$$

Vérification :

$$\arcsin(0) = 0$$

De bons éléments, clarifier l'ensemble avec le corrigé.