

lundi 27 octobre : révisions des vacances d'automne

Soit $x \in \mathbb{R}$

Tout d'abord, cherchons le domaine de définition de $\arcsin(\sqrt{2}x)$,
 $\arcsin(\sqrt{2}x)$ existe $\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{2}x \leq 1$ ✓

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \sqrt{2} \geq 0 \quad \checkmark$$

Donc $\arcsin(\sqrt{2}x)$ est définie sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]$. *On*

Puis, posons (une substitution):

Soit $\theta \in$

Soit $\arcsin(x) = \theta$ *on compose par $\sin$*
 $\downarrow \sin$

alors $x = \sin(\theta)$ ✓

et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

L'équation devient alors : $\arcsin(\sqrt{2} \sin(\theta)) = 2\theta$ ✓

Ensuite utilisons la formule du double angle:

Nous savons que $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ ✓

Ainsi nous obtenons que : $\sin(2\theta) = \sqrt{2} \sin(\theta)$ *Pourquoi?*

Puis simplifions, nous sommes face à deux éventualités:

cas 1 : $\sin(\theta) = 0$ *car $\theta \in$* $\Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow x = \sin(\theta) = 0$ ✓

cas 2 : $\sin(\theta) \neq 0$

Nous pouvons simplifier par $\sin(\theta)$:

$$2 \cos(\theta) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark$$
$$\Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

Vérifions que $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$:

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$ alors $2\theta = \frac{\pi}{2}$ ✓

Si $\theta = -\frac{\pi}{4}$ alors $2\theta = -\frac{\pi}{2}$

Les deux solutions sont donc valides.

Enfin calculons les x correspondant pour $x = \sin(\theta)$:

bon $\theta = 0$, $x = 0$

bon $\theta = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

bon $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vérifions si $\sqrt{2}x$ reste dans l'intervalle $[-1; 1]$:

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}x = 1$

Si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}x = -1$ ✓

Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x = 0$

Est-ce suffisant comme synthèse ?

conclusion, les solutions de l'équation $\arcsin(\sqrt{2}x) = 2\arcsin(x)$ sont $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2}}$. 6 mi