Correction Automne 08
Fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par analyse-synthèse (ce qui notamment nous permet de ne pas devoir chercher le domaine de définition de l'équation car nous ferons ensuite une vérification).
Analyse. Supposons

$$\arcsin\left(\sqrt{2}x\right) = 2\arcsin(x).$$

Alors nécessairement, en composant par la fonction sinus (qui n'est pas injective donc gare à la réciproque !),

$$\sin\left(\arcsin\left(\sqrt{2}x\right)\right) = \sin\left(2\arcsin(x)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{2}x = \sin\left(2\arcsin(x)\right).$$

Or $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$. Donc

$$\sqrt{2}x = 2\sin\left(\arcsin(x)\right)\cos\left(\arcsin(x)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{2}x = 2x\cos\left(\arcsin(x)\right).$$

Or $\cos^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - \sin^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - x^2$. De plus, $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\arcsin(x)\right) \geqslant 0$ et ainsi,

$$\cos\left(\arcsin(x)\right) = +\sqrt{1-x^2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}x = 2x\sqrt{1-x^2} \qquad &\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ \sqrt{2} = 2\sqrt{1-x^2} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ 2 = 4\left(1-x^2\right) \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ \frac{1}{2} = 1 - x^2 \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ OU } \ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Synthèse. Si $x = 0$, alors $\arcsin\left(\sqrt{2}x\right) = \arcsin(0) = 0$ et $2\arcsin(x) = 0$. Donc l'équation est vraie.
Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\arcsin\left(\sqrt{2}x\right) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $2\arcsin(x) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Donc l'équation est vraie.
Si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\arcsin\left(\sqrt{2}x\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $2\arcsin(x) = 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. Donc l'équation est vraie.
Conclusion, l'ensemble solution de l'équation est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.}$$