

Correction Automne 09

Trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

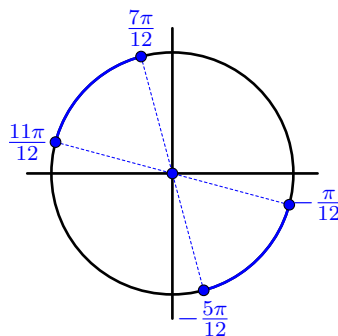
$$\begin{aligned}
 -4 \sin(x) \cos(x) &\geq 1 &\Leftrightarrow & -2 \sin(2x) \geq 1 \\
 &&\Leftrightarrow & \sin(2x) \leq -\frac{1}{2} \\
 &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
 &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi; -\frac{\pi}{12} + k\pi \right].$$

En particulier sur $[-\pi; \pi]$, on a

$$\mathcal{S}_{[-\pi; \pi]} = \left[-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right].$$



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 -4 \sin(x) \cos(x) &\leq 2 - 2 \cos(2x) &\Leftrightarrow & -2 \sin(2x) \leq 2 - 2 \cos(2x) \\
 &&\Leftrightarrow & \cos(2x) - \sin(2x) \leq 1 \\
 &&\Leftrightarrow & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &&\Leftrightarrow & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &&\Leftrightarrow & \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\
 &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\
 &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right].$$

En particulier sur $[-\pi; \pi]$, on a

$$\mathcal{S}_{[-\pi; \pi]} = \left[-\pi; -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[0; \frac{3\pi}{4} \right].$$

