Correction Automne 10
Complexes

Solution de l'exercice 1 Posons $z_1 = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après le point 2, on peut même prendre $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
Par le point 3, on a $|z_2| = 2r$ et $|z_3| = 2\,|z_2| = 4r$.
Par le point 4, on a $\arg(z_2) = \theta + \frac{\pi}{4}$ et $\arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{4} = \theta + \frac{\pi}{2}$.
On en déduit donc que $z_2 = 2r\,\mathrm{e}^{i\theta + i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = 4r\,\mathrm{e}^{i\theta + i\frac{\pi}{2}}$ et par suite,

$$z_1 z_2 z_3 = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \times 2r\,\mathrm{e}^{i\theta + i\frac{\pi}{4}} \times 4r\,\mathrm{e}^{i\theta + i\frac{\pi}{2}} = 8r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}}$$

Ainsi, par le point 1,

$$\begin{aligned}
8r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\,(-1+i) \quad &\Leftrightarrow \quad 8r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}} = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 8r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta + i\frac{3\pi}{4}} = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&\Leftrightarrow \quad r^3\,\mathrm{e}^{3i\theta} = 1 \qquad \text{car } r \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^3 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 3\theta = 2k\pi \end{cases} \qquad \text{par la pseudo-unicité de la forme polaire} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \text{ car } r > 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Or $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc on en déduit que

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Or nous avons vu que $z_2 = 2r\,\mathrm{e}^{i\theta + i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = 4r\,\mathrm{e}^{i\theta + i\frac{\pi}{2}}$. Finalement,

$$\boxed{z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{12}} \qquad z_3 = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}.}$$