

Exercice 11) Calcul algébrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f: x \mapsto (1+2x)^n$

1) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est: $F(x) \mapsto \frac{(1+2x)^{n+1}}{2(n+1)}$
 où C une constante

où C une constante

$$\begin{aligned} 2) \quad (1+2x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k \quad \checkmark \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k x^k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Une primitive de f est: $F(x) \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
 où C une constante

3) Nous avons deux expressions de $F(1)$:

$$F(1) = \frac{(1+2)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} \quad \checkmark$$

$$F(1) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{k} 1^{k+1} + C = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{k} + C \quad \text{A déterminer.}$$

On peut en déduire que $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)}$

$$2) \quad T_n = \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{2^k}{k+1-p} \binom{n}{k-p}$$

Posons un changement d'indice, posons $j = k-p$ $\checkmark$

$$\begin{aligned} \text{alors } T_n &= \sum_{j=1}^n \frac{2^{j+p}}{j+1} \binom{n}{j} \quad \checkmark \\ &= 2^p \sum_{j=1}^n \frac{2^j}{j+1} \binom{n}{j} \quad \checkmark \end{aligned}$$

On $\sum_{j=0}^n \frac{2^j}{j+1} \binom{n}{j} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)}$ d'après la question 3

Le terme $j=0$ vaut $\frac{2^0}{0+1} \binom{n}{0} = 1$ ✓

Donc $\sum_{j=1}^n \frac{2^j}{j+1} \binom{n}{j} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - 1$ cohérent

Conclusion $T_n = 2^n \left(\frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - 1 \right)$

A encadrer.