

Exercice 1

1) $f(x) = (1+2x)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Fais une phrase.

$$F(x) = \frac{1}{2(n+1)} \times (1+2x)^{n+1} \quad \checkmark$$

$$= \boxed{\frac{(1+2x)^{n+1}}{2(n+1)}} \quad \text{Gni}$$

2) On reconnaît la formule du binôme de Newton Gni

$$(1+2x)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (2x)^h \quad \checkmark \quad \left(\text{ou} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (2x)^{n-h} \right)$$

$$\text{Donc } f(x) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (2x)^h$$

$$= \boxed{\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} 2^h x^h} \quad \checkmark$$

Puisque F est une primitive de f et elle peut aussi s'écrire sous la forme

$$F(x) = \boxed{\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} 2^h \times \frac{x^{h+1}}{h+1}} + C$$

3) D'une part $F(x) = \frac{(1+2x)^{n+1}}{2(n+1)}$

D'autre part $F(x) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} 2^h \times \frac{x^{h+1}}{h+1}$

4) Prenons la deuxième forme et sommons $F(1)$ et $F(0)$

$$\begin{aligned}
 F(1) + F(0) &= \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1} \times 1^{h+1} + \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1} \times 0^{h+1} \\
 &= \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1} (1^{h+1} + 0^{h+1}) \\
 &= \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1}
 \end{aligned}$$

= 0

Donc $S_m = F(1) + F(0)$

↪ = 0

En utilisant la première expression on trouve que

$$\begin{aligned}
 F(1) + F(0) &= \frac{(1+2)^{m+1}}{2(m+1)} + \frac{(1+0)^{m+1}}{2(m+1)} \\
 &= \frac{3^{m+1} + 1}{2(m+1)}
 \end{aligned}$$

Donc $S_m = \frac{3^{m+1} + 1}{2(m+1)}$

cohérent

$$\begin{aligned}
 \text{c) } S_m &= \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1} \\
 &= \sum_{h=1}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1} + \binom{m}{0} \times \frac{2^0}{0+1} \quad \checkmark \\
 &= \sum_{h=1}^m \binom{m}{h} \frac{2^h}{h+1} + 1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Posons $\hat{h} = h + p$ donc $h = \hat{h} - p \quad \checkmark$

si $h = 1$ alors $\hat{h} = p + 1$

si $h = m$ alors $\hat{h} = m + p$

$$\text{Done } S_n = \sum_{h=p+1}^{n+p} \binom{n}{h-p} \frac{2^{\hat{h}-p}}{\hat{h}+1-p} + 1 \quad \text{mi}$$

$$= \sum_{h=p+1}^{n+p} \binom{n}{h-p} \frac{2^{h-p}}{h+1-p} + 1 \quad \checkmark$$

car l'indice est

$$= \sum_{h=p+1}^{n+p} \binom{n}{h-p} \frac{2^h}{h+1-p} \times 2^{-p} + 1 \quad \checkmark$$

$$= T_n \times 2^{-p} + 1$$

$$S_n = \frac{T_n}{2^p} + 1 \quad \text{OK!}$$

$$\Leftrightarrow S_n - 1 = \frac{T_n}{2^p}$$

$$\Leftrightarrow 2^p (S_n - 1) = T_n \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow T_n = 2^p (S_n - 1)$$

$$= 2^p \left(\frac{3^{n+1} + 1}{2(n+1)} - 1 \right)$$

$$= \frac{2^p (3^{n+1} + 1)}{2(n+1)} - 2^p$$

$$= \frac{\cancel{2^p \times 3^{n+1}} + \cancel{2^p} - \cancel{2^p \times 2(n+1)}}{2(n+1)} - 2^p$$

$$= \frac{2^p (3^{n+1} + 1) - 2^p (2(n+1))}{2(n+1)}$$

$$= \frac{2^p (3^{n+1} + 1 - 2n - 2)}{2(n+1)}$$

$$T_m = 2^{p-1} \times \frac{3^{n+1} - 2m - 1}{(m+1)}$$

OK coherent