Correction Automne 11
Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto (1+2x)^n$.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle) et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par

$$\boxed{F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(1+2x)^{n+1}}{2(n+1)}. \end{array}}$$

2. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1+2x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x)^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k x^k.$$

Sous cette nouvelle forme, on constate que la fonction G définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \text{(car } k+1 \geqslant 1 > 0\text{)}$$

est UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = F(x) + C.$$

Déterminons C en évaluant la précédente égalité en 0 :

$$G(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \underbrace{\frac{0^{k+1}}{k+1}}_{=0 \text{ car } k+1 \geqslant 1} = 0.$$

D'autre part, $F(0) = \frac{(1+0)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}$. Par conséquent,

$$C = G(0) - F(0) = -\frac{1}{2(n+1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = G(x) - C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2(n+1)}.}$$

3. Par les questions précédentes, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{(1+2x)^{n+1}}{2(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

En particulier, pour $x = 1$,

$$F(1) = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{k+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}.}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Effectuons le glissement d'indice $\tilde{k} = k - p$. Si $k = p + 1$, alors $\tilde{k} = 1$, si $k = n + p$, alors $\tilde{k} = n$ et $k = \tilde{k} + p$. Alors,

$$T_n = \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{2^k}{k+1-p}\binom{n}{k-p} = \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \frac{2^{\tilde{k}+p}}{\tilde{k}+1}\binom{n}{\tilde{k}} = 2^p \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k+1}\binom{n}{k},$$

car l'indice de sommation est muet et 2^p ne dépend pas de l'indice de sommation. Il nous manque le premier terme pour reconnaitre S_n, ainsi,

$$\begin{aligned} T_n &= 2^p S_n - 2^p \frac{2^0}{0+1}\binom{n}{0} \\ &= 2^p S_n - 2^p = 2^p \left(\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)} - 1 \right) \\ &= 2^p \frac{3^{n+1} - 1 - 2n - 2}{2(n+1)} \\ &= 2^{p-1} \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{T_n = 2^{p-1} \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{n+1}.}$$