

Exercice Automne 12:

Soit $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}\right)$

1) La fonction f possède une image $f(x)$ <sup>Soit $x \in \mathbb{R}$
 $f(x)$ existe</sup> si et seulement si :

$$x^2 + 2x - 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

Donc : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1$
 $= 4 + 4$
 $= 8 \quad \checkmark$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-2 - \sqrt{8}}{2}$$

$$= -1 - \sqrt{2} \quad \checkmark$$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 \quad \checkmark$$

f est alors définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$ *Qui A en radian*

La fonction f est composée de la fonction arctan qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi qu'un quotient de fonctions qui est dérivable sur D .

Donc f est dérivable sur D . $\checkmark$

2) On sait que la fonction arctan a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$ pour arctan(x) or ici, on a arctan($u(x)$), avec $u(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$

~~$x \in \mathbb{R}$~~ $\checkmark$

alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} \quad \checkmark$

On calcule $u'(x)$:

$$u'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+2x-1) - (2x+2)(x^2-2x-1)}{(x^2+2x-1)^2} \quad \checkmark$$

$$= \frac{4(x^2+1)}{(x^2+2x-1)^2} \quad \text{Parachutage}$$

puis $1+(u(x))^2$:

$$1+(u(x))^2 = \frac{(x^2-2x-1)^2 + (x^2+2x-1)^2}{(x^2+2x-1)^2} \quad \checkmark$$

$$= \frac{2x^4 + 4x^2 + 2}{(x^2+2x-1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+1)^2}{(x^2+2x-1)^2} \quad \checkmark$$

Parachutage

$$\text{Et } f'(x) = \frac{\frac{4(x^2+1)}{(x^2+2x-1)^2}}{\frac{2(x^2+1)^2}{(x^2+2x-1)^2}} \quad \text{V} = \frac{4(x^2+1)}{2(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{1+x^2} \quad \text{Bien}$$

3) On reconnaît 2 arctan'(x) = $\frac{2}{1+x^2}$

Par conséquent, on peut simplifier $f(x)$ par :

$$f(x) = 2 \arctan(x) \quad + \quad \text{Change sur les différents intervalles.}$$

4) Puisque l'on peut simplifier $f(x)$ par $2 \arctan(x)$, on peut reprendre la courbe de la fonction arctan et multiplier ses valeurs par 2 :

