

Correction Automne 12

Fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1

1. Soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 \neq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 + 2x - 1$. On a $\Delta = 4 + 4 = 8$, par conséquent les racines de ce polynôme sont $\frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $\frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$. Conclusion, le domaine de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}.$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient et composée de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition. Conclusion,

$$\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}.$$

2. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a par dérivation d'une composée et d'un quotient,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} \right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} \right)^2} \\ &= \frac{(2x - 2)(x^2 + 2x - 1) - (x^2 - 2x - 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 1)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} \right)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 2x^2 - 4x + 2 - (2x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 4x - 2x - 2)}{(x^2 + 2x - 1)^2 + (x^2 - 2x - 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 4}{2x^4 + 4x^2 + 2} \\ &= \frac{2(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} \\ &= \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2}{x^2 + 1} \quad \text{car } x^2 + 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

3. On a donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = 2 \arctan'(x).$$

On souhaite intégrer cette égalité pour obtenir une expression plus simple de f . ATTENTION! On ne peut intégrer que sur des intervalles. Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[$,

$$f(x) = 2 \arctan(x) + C_1.$$

De même, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[$,

$$f(x) = 2 \arctan(x) + C_2.$$

Et enfin, il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-1 + \sqrt{2}; +\infty[$,

$$f(x) = 2 \arctan(x) + C_3.$$

On détermine ces constantes.

- D'une part, $f(0) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Et d'autre part, $f(0) = 2 \arctan(0) + C_2 = C_2$.
Donc $C_2 = \frac{\pi}{4}$.
- De façon analogue, puisque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = 1.$$

Par continuité de la fonction $\arctan$ en 1, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \arctan(u) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) + C_1 = -2 \frac{\pi}{2} + C_1 = C_1 - \pi$. Par conséquent,
 $C_1 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

- De la même façon

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1} = 1$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Puis,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \frac{\pi}{2} + C_3.$$

$$\text{Donc } C_3 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Conclusion

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arctan(x) + \frac{5\pi}{4} & \text{si } x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[\\ 2 \arctan(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[\\ 2 \arctan(x) - \frac{3\pi}{4} & \text{si } x \in]-1 + \sqrt{2}; +\infty[\end{cases}$$

4. On obtient le graphe de f par une dilatation verticale de facteur 2 de la fonction arctangente puis par une translation verticale de vecteur $\frac{5\pi}{4} \vec{i}$, $\frac{\pi}{4} \vec{i}$ et $-\frac{3\pi}{4} \vec{i}$ respectivement sur chacun des intervalles.

