

Correction Hiver 01

Ensembles et applications & Fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1

1. Déterminons $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ le domaine de définition de f . Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} + i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} \neq -i \quad \Leftrightarrow \quad z \neq i.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{i\}}.$$

2. Démontrons que f est injective sur $\mathcal{D}$: on veut montrer que $\forall (a, b) \in \mathcal{D}^2 = (\mathbb{C} \setminus \{i\})^2, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Soient $(a, b) \in \mathcal{D}^2 = (\mathbb{C} \setminus \{i\})^2$. On a

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) & \Leftrightarrow \frac{2\bar{a}}{\bar{a} + i} = \frac{2\bar{b}}{\bar{b} + i} \\ & \Leftrightarrow 2\bar{a}(\bar{b} + i) = 2\bar{b}(\bar{a} + i) \\ & \Leftrightarrow 2\bar{a}\bar{b} + 2i\bar{a} = 2\bar{a}\bar{b} + 2i\bar{b} \\ & \Leftrightarrow 2i\bar{a} = 2i\bar{b} \\ & \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} \\ & \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est injective sur } \mathcal{D}}.$$

3. Résolvons, suivant les valeurs de $\omega \in \mathbb{C}$, les solutions $z \in \mathcal{D}$ vérifiant $f(z) = \omega$. Soient $\omega \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathcal{D}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = \omega & \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}}{\bar{z} + i} = \omega \\ & \Leftrightarrow 2\bar{z} = \omega(\bar{z} + i) \quad \text{car } \bar{z} + i \neq 0 \text{ car } z \neq i \\ & \Leftrightarrow (2 - \omega)\bar{z} = i\omega. \end{aligned}$$

Premier cas, $\omega \neq 2$, alors,

$$\begin{aligned} f(z) = \omega & \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{i\omega}{2 - \omega} \\ & \Leftrightarrow z = \frac{-i\bar{\omega}}{2 - \bar{\omega}} = \frac{i\bar{\omega}}{\bar{\omega} - 2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas $\mathcal{S}_\omega = \left\{ \frac{i\bar{\omega}}{\bar{\omega} - 2} \right\}$.

Deuxième cas, si $\omega = 2$, alors

$$f(z) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2i \text{ impossible.}$$

Alors $\mathcal{S}_2 = \emptyset$. Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathcal{S}_\omega = \begin{cases} \left\{ \frac{i\bar{\omega}}{\bar{\omega} - 2} \right\} & \text{si } \omega \neq 2 \\ \emptyset & \text{si } \omega = 2. \end{cases}}$$

4. Dédudions-en que f n'est pas surjective dans $\mathbb{C}$. Autrement dit montrons la négation de $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \exists z \in \mathcal{D}, f(z) = \alpha$: montrons que

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathcal{D}, f(z) \neq \alpha.$$

Par la question précédente, si $\alpha = \omega = 2$, alors, $f(z) = 2$ n'admet aucune solution. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective dans } \mathbb{C}.}$$

NB : la fonction f est cependant surjective dans $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ et définit donc une bijection de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

Solution de l'exercice 2

- Justifions que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto \arctan(x-1) + \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}$.
 - Comme somme et composée de fonctions qui le sont, la fonction f est définie et même continue sur $\mathbb{R}$.
 - Les fonctions $x \mapsto x-1$, $x \mapsto x+1$ et $\arctan$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} > 0$.

Dès lors, par le théorème de la bijection, la fonction f admet une unique valeur d'annulation :

$$\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(x-1) + \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'équation (E) admet une unique solution sur } \mathbb{R}.}$$

- Déterminons l'unique solution de (E). Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \text{ solution de (E)} &\Rightarrow \tan(\arctan(x-1) + \arctan(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\tan(\arctan(x-1)) + \tan(\arctan(x+1))}{1 - \tan(\arctan(x-1))\tan(\arctan(x+1))} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x-1 + x+1}{1 - (x-1)(x+1)} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{2x}{1 - (x^2 - 1)} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{2x}{2 - x^2} = 1 \\ &\Rightarrow 2x = 2 - x^2 \\ &\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 8 = 12$. Donc

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \text{ OU } x = -1 - \sqrt{3}.$$

Testons, si $x = -1 - \sqrt{3}$, on a

$$\begin{aligned} \arctan(x-1) + \arctan(x+1) &= \arctan(-2 - \sqrt{3}) + \arctan(-\sqrt{3}) \\ &= \underbrace{-\arctan(2 + \sqrt{3})}_{<0} - \underbrace{\arctan(\sqrt{3})}_{<0} \quad \text{par imparité de } \arctan \neq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Donc $x = -1 - \sqrt{3}$ n'est pas une solution. Donc l'unique solution est donnée par

$$\boxed{x = \sqrt{3} - 1.}$$