

Correction Hiver 02

Analyse asymptotique & Equations différentielles II

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $x > \frac{1}{\pi}$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \ln(1) = 0$ et $0 < \frac{1}{x} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Par conséquent f est bien définie sur $\left]\frac{1}{\pi}; +\infty\right[$ et

$$\forall x > \frac{1}{\pi}, \quad f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sin^{3/2}\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \text{car } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0.$$

On a alors les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-3/2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{-3/2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \frac{1}{x^{-3/2}} \left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^{3/2}}{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Or on sait que $(1+u)^{-3/2} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{3u}{2} + o(u)$. Donc en posant $u = -\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a bien $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $o(u) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{12x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

2. Notamment, on déduit de la question précédente que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Conclusion,

f admet une branche asymptotique en $+\infty$ de direction (Ox) .

Solution de l'exercice 2 Les coefficients $a = 3$, $b = 4$ et $c = \frac{1}{3}$ étant constant et le second membre $d : x \mapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que (E) admet des solutions. L'équation homogène associée est

$$(E_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3y''(x) + 4y'(x) + \frac{1}{3}y(x) = 0$$

et l'équation caractéristique

$$(E_c) \quad 3r^2 + 4r + \frac{1}{3} = 0.$$

Le discriminant associé vaut $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$. Donc (E_c) possède deux racines :

$$r_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{6} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} - 2}{3}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{3}x} + B e^{\frac{\sqrt{3}-2}{3}x} \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ou encore

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{3}x}, \quad x \mapsto e^{\frac{\sqrt{3}-2}{3}x} \end{array} \right).$$

Puisque le second membre est polynomiale de degré 1, cherchons une solution polynomiale de degré 1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $y_p : x \mapsto ax + b$. La fonction y_p est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) = a \quad \text{ET} \quad y_p''(x) = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3y_p''(x) + 4y_p'(x) + \frac{1}{3}y_p(x) = x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 4a + \frac{ax + b}{3} = x. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} \frac{a}{3} = 1 \\ 4a + \frac{b}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -12a = -36 \end{cases}$$

Donc $y_p : x \mapsto 3x - 36$ est une solution de (E) . Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{3}x} + B e^{\frac{\sqrt{3}-2}{3}x} + 3x - 36 \end{array} \middle| (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$