

Exercice Hiver 03

Suites & Nombres complexes

Exercice 1 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Justifier que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Justifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2xy \leq x^2 + y^2$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
On pourra poser $x = \sqrt{u_n}$ et $y = \dots$
4. En déduire la monotonie de chacune des suites.
5. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite PUIS en déduire que les deux suites sont adjacentes.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| < 1$. On définit lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et vérifier que $\mathbb{U} \subseteq \mathcal{D}_f$.
2. Montrer que $f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$.