

Correction Hiver 04

Continuité, dérivabilité & Matrices

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow (e^x - 1)x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ e^x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*.$$

2. On sait que $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

D'autre part, $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et donc $(e^x - 1)x \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x))x \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. Alors par quotient, on obtient,

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{(e^x - 1)x} \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Dès lors, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$ et la fonction nouvelle fonction prolongée est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{(e^x-1)x} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. De plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble et dont le dénominateur ne s'annule pas et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{-\sin(x)(e^x - 1)x - (\cos(x) - 1)(xe^x + e^x - 1)}{(e^x - 1)^2 x^2}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = -\sin(x)(e^x - 1)x - (\cos(x) - 1)(xe^x + e^x - 1)$. Avec les développe-

ments limités usuels, on a

$$\begin{aligned}
 D(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(x + o(x^2)\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right) x \\
 &\quad - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right) \left(x(1 + x + o(x)) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(x + o(x^2)\right) \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) x \\
 &\quad - \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(x + x^2 + o(x^2) + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3)\right) x - \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(2x + \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(-x^3 - \frac{3x^4}{4} + o(x^4) + o(x^4)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^4}{4} + o(x^4).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{4}.$$

D'autre part, on a

$$(e^x - 1)^2 x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 x^2 = x^4.$$

Donc par quotient,

$$f'(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{x^4/4}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $1/4$.

Donc par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et de plus $f'(0) = \frac{1}{4}$.

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2

- On a directement On a $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ puis,

$$\boxed{BC = O_3.}$$

- Par la question précédente, $BC = O_3$. De même $CB = O_3$. Puisque $C = A - B$, on a $A = B + C$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = (B + C)^n$. Or puisque $BC = CB$ les matrices B et C commutent. Donc par la formule de binôme de Newton, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k C^{n-k}.$$

Si $n \geq 2$, en extrayant les termes de chaque bord, on obtient que

$$A^n = C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} B^k C^{n-k} + B^n.$$

Les deux matrices étant commutatives, on peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} A^n &= C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{BC}_{=O_3} B^{k-1} C^{n-k-1} + B^n && \text{car } k \geq 1 \text{ et } k \leq n-1 \\ &= C^n + O_3 + B^n && \text{car } BC = O_3 \\ &= B^n + C^n. \end{aligned}$$

On observe que cette formule reste vraie si $n = 1$ par définition de C . Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = B^n + C^n.}$$