

Correction Hiver 05

Ensemble et applications & Equations complexes

Solution de l'exercice 1

1. On suppose que $A \cup B = E$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Montrons que $X = Y$. Soit $x \in X \subseteq E = A \cup B$. Alors $x \in A \cup B$. Premier cas, $x \in A$. Puisque $x \in X$ on a alors $x \in X \cap A$. Or $X \cap A = Y \cap A \subseteq Y$. Donc $x \in Y$.

Second cas, $x \in B$. De même, $x \in X \cap B = Y \cap B \subseteq Y$. Donc $x \in Y$.

Dans tous les cas, $x \in Y$. Donc $X \subseteq Y$. Par symétrie des hypothèses sur X et Y , on démontre de même que $Y \subseteq X$. Conclusion,

$$\boxed{X = Y.}$$

2. Soit $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. Alors,

$$f(X) = f(Y) \quad \text{i.e.} \quad (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B).$$

Ainsi, $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Donc par la question précédente, $X = Y$. Ainsi, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

Solution de l'exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z - 1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 1$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta} &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} e^{i\frac{2k\pi}{n}} && \text{car } n \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad z+1 = (z-1) e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} && \text{car } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad z \left(1 - e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}\right) = - \left(1 + e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}\right). \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} 1 - e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} = 0 &\Leftrightarrow 1 = e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} &\Leftrightarrow \theta + \frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ &&\Leftrightarrow \theta \equiv -\frac{2k\pi}{n} \pmod{2\pi} \\ &&\Leftrightarrow \frac{n\theta}{2\pi} \equiv -k \pmod{n} \\ &&\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \quad \frac{n\theta}{2\pi} = km. \end{aligned}$$

Cette dernière assertion n'est jamais vraie car $\frac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Par conséquent, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $1 - e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})} \neq 0$. Dès lors,

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad z = -\frac{1 + e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}}{1 - e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}}.$$

Evidemment une factorisation par l'angle moitié s'impose. Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$,

$$-\frac{1 + e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}}{1 - e^{i(\theta + \frac{2k\pi}{n})}} = -\frac{e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n})} e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n})} + e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n})}}{e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n})} e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n})} - e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n})}} = -\frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)} = -i \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ -i \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)} \mid k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$