

Correction Hiver 06

Analyse asymptotique & Equation différentielle I

Solution de l'exercice 1 On sait que $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + o(u^8)$. Donc, en posant $u = t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, on a

$$\arctan(t^2) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 - \frac{t^6}{3} + \frac{t^{10}}{5} - \frac{t^{14}}{7} + o(t^{16}).$$

Or la fonction $t \mapsto \arctan(t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est UNE primitive de $t \mapsto \arctan(t^2)$ sur $\mathbb{R}$ (voisinage de 0). Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{21} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105} + o(x^{17}).$$

Or $F(0) = \int_0^0 \arctan(t^2) dt = 0$. Conclusion,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{21} + \frac{x^{11}}{55} - \frac{x^{15}}{105} + o(x^{17}).$$

Solution de l'exercice 2 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{2x}{1+x}$ et $b : x \mapsto (1+x)^3 e^x$ sont continues sur $I =]1; +\infty[$. Donc l'équation (E) admet des solutions. Puisque a est continue, elle admet des primitives sur cet intervalle. Puisque

$$\forall x \in I, \quad a(x) = \frac{2x}{1+x} = \frac{2(x+1)-2}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x},$$

on en déduit que l'une des primitives de a est donnée sur I par

$$A : x \mapsto 2x - 2 \ln(|1+x|) = 2x - 2 \ln(1+x).$$

Ainsi

$$\forall x \in I, \quad e^{-A(x)} = e^{-2x+2 \ln(1+x)} = (1+x)^2 e^{-2x}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) l'équation homogène associée à (E) est

$$\mathcal{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C(1+x)^2 e^{-2x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+x)^2 e^{-2x} \end{array} \right).$$

Il n'est pas inutile de vérifier son résultat, si $y : x \mapsto (1+x)^2 e^{-2x}$,

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{2x}{1+x} y(x) &= 2(1+x) e^{-2x} - 2(1+x)^2 e^{-2x} + 2x(1+x) e^{-2x} \\ &= 2(1+x) e^{-2x} (1 - 1 - x + x) = 0 \quad OK. \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in I$, $y_0(x) = (1+x)^2 e^{-2x}$. Soient y une fonction dérivable sur I et $\lambda = \frac{y}{y_0}$ qui est bien définie car y_0 ne s'annule pas sur I . De plus, y_0 est dérivable sur I donc par quotient, λ est bien dérivable sur I . De plus, $y = \lambda y_0$. Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad y'(x) + \frac{2x}{1+x} y(x) = (1+x)^3 e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) + \frac{2x}{1+x} \lambda(x) y_0(x) = (1+x)^3 e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) \underbrace{\left(y_0'(x) + \frac{2x}{1+x} y_0(x) \right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_{F_0}} = (1+x)^3 e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \lambda'(x) (1+x)^2 e^{-2x} = (1+x)^3 e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = (1+x) e^{3x} \quad \text{car } 1+x \neq 0 \text{ sur } I. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in I$, posons

$$F(x) = \int_2^x (1+t) e^{3t} dt.$$

Puisque $x \mapsto (1+x) e^{3x}$ est continue sur I , par le théorème fondamental de l'analyse F existe, est même $\mathcal{C}^1$ et est une primitive de $x \mapsto (1+x) e^{3x}$. Posons

$$\forall t \in I, \begin{cases} u(t) = \frac{e^{3t}}{3} \\ v(t) = 1+t \end{cases}$$

Alors les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \begin{cases} u'(t) = e^{3t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad F(x) &= \left[(1+t) \frac{e^{3t}}{3} \right]_{t=2}^{t=x} - \int_2^x \frac{e^{3t}}{3} dt \\ &= (1+x) \frac{e^{3x}}{3} - e^6 - \left[\frac{e^{3t}}{9} \right]_{t=2}^{t=x} \\ &= (1+x) \frac{e^{3x}}{3} - e^6 - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^6}{9} \\ &= \frac{3x+2}{9} e^{3x} - \frac{8e^6}{9}. \end{aligned}$$

Par suite, on obtient que

$$\begin{aligned} &y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &\forall x \in I, \quad \lambda'(x) = (1+x) e^{3x} \\ \Leftrightarrow &\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{3x+2}{9} e^{3x} + C \\ \Leftrightarrow &\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left(\frac{3x+2}{9} e^{3x} + C \right) (1+x)^2 e^{-2x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S}_E = \left\{ \begin{array}{l|l} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(\frac{3x+2}{9} e^{3x} + C \right) (1+x)^2 e^{-2x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$