

Correction Hiver 07

Suites & Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est définie et même dérivable sur I_n et pour tout $x \in I_n$,

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x).$$

Donc pour tout $x \in I_n \setminus \{n\pi\}$, $f'(x) > 0$ et $f(n\pi) = 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur I_n . De plus

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n\pi - \frac{\pi}{2} \\ x > n\pi - \frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2} \\ x < n\pi + \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$n\pi - \frac{\pi}{2}$	$n\pi + \frac{\pi}{2}$
f	$-\infty$	$+\infty$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in I_n$ et donc $x_n > n\pi - \frac{\pi}{2}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi - \frac{\pi}{2} = +\infty$. Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\text{La suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in I_n$ et $x_{n+1} \in I_{n+1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} = (n+1)\pi - \frac{\pi}{2} < x_{n+1}.$$

Conclusion,

$$\text{La suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en divisant par $n\pi > 0$,

$$1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$. Autrement dit,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi.$$

Solution de l'exercice 2 *Méthode 1, en sommant en interne sur k .* Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right] = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right].$$

On reconnaît en interne une somme télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^n \left[\binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{n+1} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\binom{n+1}{i} - 1 \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} - \sum_{i=0}^n 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{n+1} - (n+1) \\ &= 2^{n+1} - 1 - (n+1) \quad \text{car on reconnaît un binôme de Newton} \\ &= 2^{n+1} - (n+2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = 2^{n+1} - (n+2).$$

Vérification, si $n = 1$,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq 1} \left[\binom{2}{k} - \binom{2}{k+1} \right] \\ &= \underbrace{\left[\binom{2}{0} - \binom{2}{1} \right]}_{i=0, k=0} + \underbrace{\left[\binom{2}{1} - \binom{2}{2} \right]}_{i=0, k=1} + \underbrace{\left[\binom{2}{1} - \binom{2}{2} \right]}_{i=1, k=1} \\ &= 1 - 2 + 2 - 1 + 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Et $2^{n+1} - (n+2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$, OK!

Méthode 2, en sommant en interne sur i . Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right] = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right].$$

Le terme $\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right]$ ne dépend pas de i . Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \left(\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right] \sum_{i=0}^k 1 \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right] (k+1) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n+1}{k} (k+1) - \binom{n+1}{k+1} (k+1) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n+1}{k} k + \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} (k+1) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n+1}{k} k - \binom{n+1}{k+1} (k+1) \right] + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans la première somme, une somme télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n+1}{0} \times 0 - \binom{n+1}{n+1} (n+1) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - 1 \\ &= -(n+1) + 2^{n+1} - 1 \quad \text{car on reconnaît un binôme de Newton} \\ &= 2^{n+1} - (n+2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$S_n = 2^{n+1} - (n+2).$$