

Correction Hiver 08

Continuité-dérivabilité & Calcul d'intégrales

Solution de l'exercice 1

1. La fonction f est **continue** sur le **segment** $[-1; 1]$. Donc par le théorème des bornes atteintes, la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur $[-1; 1]$:

$$\exists (a, b) \in [-1; 1]^2, \forall x \in [-1; 1], \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Posons $M = \max(-f(a), f(b)) = \max(|f(a)|, |f(b)|)$, alors,

$$\forall x \in [-1; 1], \quad |f(x)| \leq M.$$

Posons $\alpha = \begin{cases} a & \text{si } M = |f(a)| \\ b & \text{si } M = |f(b)| \end{cases}$. Conclusion,

$$\forall x \in [-1; 1], \quad |f(x)| \leq |f(\alpha)|.$$

2. La fonction f est continue sur $[-1; 1]$. De plus, f est dérivable sur $] -1; 0[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists a \in] -1; 0[, \quad f'(a) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-(-1)}{1} = 1.$$

De même f est continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists b \in]0; 1[, \quad f'(b) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

On note que $a < 0 < b$ donc $a < b$. Puisque f est deux fois dérivable sur $] -1; 1[$, alors la fonction f' est dérivable et donc continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]a; b[, \quad f''(c) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = \frac{1 - 1}{b - a} = 0.$$

Comme $]a; b[\subseteq] -1; 1[$, on conclut que

$$\exists c \in] -1; 1[, \quad f''(c) = 0.$$

Solution de l'exercice 2 La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'une est donnée par le théorème fondamental de l'analyse par :

$$F : \quad x \mapsto \int_1^x t^4 \sin(\ln(t)) dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t > 0$, $s = \ln(t)$ i.e. $t = e^s$. Si $t = 1$, $s = 0$. Si $t = x$, $s = \ln(x)$. Enfin, $s \mapsto e^s$

est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $dt = e^s ds$. Dès lors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x t^4 \sin(\ln(t)) dt \\ &= \int_0^{\ln(x)} e^{4s} \sin(s) e^s ds \\ &= \int_0^{\ln(x)} e^{5s} \operatorname{Im}(e^{is}) ds \\ &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{\ln(x)} e^{5s+is} ds \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(5+i)s}}{5+i} \right]_{s=0}^{s=\ln(x)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(5+i)\ln(x)} - 1}{5+i} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{[e^{5\ln(x)} (\cos(\ln(x)) + i \sin(\ln(x))) - 1] (5-i)}{26} \right) \\ &= \frac{x^5}{26} (-\cos(\ln(x)) + 5 \sin(\ln(x))). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ll}]0; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x^5}{26} (5 \sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.$$