

Correction Hiver 09

Ensembles et Applications & Calcul dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1

- Montrons par l'absurde que $y \notin f(A)$. Supposons que $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or par hypothèse, on a $y \in f(\overline{A})$. Donc il existe $x' \in \overline{A}$ tel que $y = f(x')$. On a $x' \in \overline{A}$ i.e. $x' \notin A$. Or $y = f(x) = f(x')$. Donc par l'injectivité de f , $x = x'$. Donc $x = x' \in A \cap \overline{A} = \emptyset$ ce qui est absurde. Conclusion,

$$\boxed{y \notin f(A)}.$$

- Déterminons quelle égalité ensembliste nous avons démontrée. Par la question précédente, pour tout $y \in f(\overline{A})$, on a $y \notin f(A)$ ou encore $y \in \overline{f(A)}$. Donc

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}}.$$

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2x - 6 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x \geq 2 \text{ OU } x \leq 1) \\ x > 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > 3. \end{aligned}$$

Fixons désormais $x > 3$. On a alors,

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x - 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < (2x - 6)^2 \quad \text{car } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ et } 2x - 6 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 4x^2 - 24x + 36 \\ &\Leftrightarrow 0 < 3x^2 - 21x + 34. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = 21^2 - 4 \times 3 \times 34 = 3(7 \times 21 - 4 \times 34) = 3(147 - 136) = 3 \times 11 > 0.$$

Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{21-\sqrt{33}}{6}$ et $r_2 = \frac{21+\sqrt{33}}{6}$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow x < r_1 \text{ OU } x > r_2.$$

Or

$$r_1 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 21 - \sqrt{33} > 18 \quad \Leftrightarrow \quad 3 > \sqrt{33} \text{ faux.}$$

Et

$$r_2 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 21 + \sqrt{33} > 18 \text{ vrai.}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left] \frac{21 + \sqrt{33}}{6}; +\infty \right[}.$$